第 4 章　フェーザー・複素数を使ったインピーダンス計算

交流信号を正弦波による波の式で表すことで、R,L,C を含む線形回路における電圧や電流を計算することができるが、微分、積分がたくさん出てきて、計算が困難である。3 章では、R-L-C の直列回路を題材とした講義をすすめてきたが、さらに回路が複雑になると学んできた微分方程式による計算は困難になる。電気回路の世界では、交流信号をフェーザー表示（ベクトル表示）にすることで、複素数による線形代数式にしてしまう方法がある。第 3 章の話は重要であるが、複素数の計算に慣れてしまうと、こちらの計算だけで十分に仕事ができるようになる。本章では、フェーザー表示について理解を深め、複素数の計算、そしてベクトル図との関係、回路の計算練習を通して、本技術を身に着けていく。

1．正弦波を複素数で表すとどうなる

1) 正弦波を複素数で表す試み　その 1

結論を急ぐ読者においても、この節から読み始めてほしい。実効値 V_E の正弦波の交流の波の式は、

$$V(t) = \sqrt{2}V_E \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

と表現される。この式の代わりに次の複素数の式を使うとしよう。

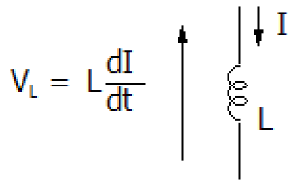
$$V(t) = V_E e^{j(\omega t + \varphi)} \qquad (2)$$

上記の(1)と(2)式は完全に等価ではないが、これを使うというルールを仮決めしておく。このなかで j とでてくるが、これは $\sqrt{-1}$ であり、電気回路では i を使わずに j を使う。これは、電気回路では i は電流を標記するのにつかわれるため、誤解を防ぐためである。(2)式から、(1)の瞬時値の表現に戻す場合は、**オイラーの式**を使って、虚数部（ j の係数）を取り出し、それに $\sqrt{2}$ をかければよい。

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = cos(\omega t + \varphi) + jsin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

このような具合である。

この式を使って、次の計算をしてみる。電流 I を $I(t) = I_E e^{j(\omega t + \varphi)}$ としたときに、V_L を求めてみる。



$$V_L = V_E e^{j(\omega t + \varphi)} = L\frac{dI}{dt} = j\omega L I_E e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (4)$$

となる。この結果において、正弦波の式に戻してみよう。

$$j\omega L I_E e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega L I_E(cos(\omega t + \varphi) + jsin(\omega t + \varphi)) = \omega L I_E sin(\omega t + \varphi) + j\omega L I_E cos(\omega t + \varphi)$$

より $\sqrt{2}\omega L I_E cos(\omega t + \varphi)$ と戻すことができる。(4)の式において、j は $e^{j\frac{\pi}{2}}$ であることから、

$$V_E e^{j(\omega t+\varphi)} = \omega L I_E e^{j\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$$ となる。

以上の試みから、正弦波を$e^{j(\omega t+\varphi)}$を使っても、L を含む微分式でもきちんと計算ができるということがわかる。この式の変換はコンデンサ C を含む積分の計算でも利用可能である。

2) 正弦波を複素数で表す試み　その 2

実効値 V_E の正弦波の交流の波の式、

$$V(t) = \sqrt{2}V_E \sin(\omega t+\varphi) \qquad (3)$$

について、さらに踏み込んで、$e^{j\omega t}$の部分も消して、

$$V = V_E e^{j\varphi} \qquad (4)$$

としてみよう。このように、交流信号を大きさと位相角のみで表すことを、**フェーザー表示**という。ベクトル表示ともいい、単純に複素数で表すことと考えてもよい。

そして、R、L、C のインピーダンスは複素数を含む次のように表現とする。

素子			複素インピーダンス
抵抗	R	⇒	R
コイル	L	⇒	$j\omega L$
コンデンサ	C	⇒	$1/_{j\omega C}$

※ 誤解なきよう、複素インピーダンスの単位はどの素子も Ω である。

そして、計算結果を瞬時値にしたい時には、複素数に$e^{j\omega t}$をかけて、その虚数部を$\sqrt{2}$倍すればよい。

電流を$I = \sqrt{2}I_E \sin(\omega t+\varphi)$として、コイルの起電力を求めてみよう。これは、その１の節で示したものと同じである。電流は I=$I_E e^{j\varphi}$で、コイルのインピーダンスは、$j\omega L$であり、

$$V = j\omega L I_E e^{j\varphi} = \omega L I_E e^{j\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

と計算できる。ここから V の瞬時値は

$$\sqrt{2}\omega L I_E sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\underline{\sqrt{2}\omega L I_E cos(\omega t+\varphi)}$$

と求めることができる。

非常に長く説明したがこういうことである。

① 正弦波の式は実効値と位相角だけ取り出して、複素数化する。

$\sqrt{2}V_E \sin(\omega t+\varphi) \Rightarrow V_E \angle\varphi$

$\Rightarrow V_E e^{j\varphi}$

② 正弦波の式にしたければ、$e^{j\omega t}$をかけて、オイラーの式に基づき、虚数部をとり、$\sqrt{2}$をかけて求める。

③ インダクタンスのインピーダンスは複素数込みの$j\omega L$として計算する。C のインピーダンスは$1/_{j\omega C}$、抵抗のインピーダンスは実数 Rとして計算する。

こうすることで、R,L,C を含む線形回路の交流の計算が、微分積分を使わなくても済むという恩恵を受ける。

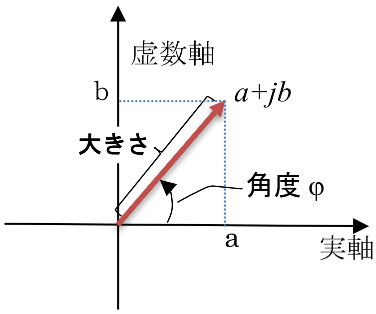
2. 複素数の計算に慣れていく

これから回路の問題を解いていこうと思うところであるが、基礎を抜きにしての練

習はいささか危険である。まずはひとつずつ固めていきたい。

1) 複素数の大きさと角度

　複素数の標記をすると、*a+jb* というように、*a* は実部であり、*b* は虚部とするが、複素数は２つの数値情報をもち、これを次のベクトル表示に書き換えることができる。すなわち、横軸を実部、縦軸を虚部とする２次元平面にかくとこうなる。



この平面を複素平面とも言う。原点からの長さを複素数の**大きさ**といい、これを|*a+jb*|と表す。**長さ**と**大きさ**とは同じ意味でどちらも非常によく使われる。また水平軸からの仰角 φ を角度（位相角）という。次の計算がなりたつ。

複素数の大きさ（長さ）

$$|a+jb|=\sqrt{a^2+b^2}$$

複素数の角度

$$\angle(a+jb)=\varphi=tan^{-1}\frac{b}{a}$$

となる。

2）複素数の加減乗除

加法・減法

$$a+jb+c+jd= (a+c)+j(b+d)$$

$$(a+jb)-(c+jd)= (a-c)+j(b-d)$$

　加減は、実数項どうし、虚数項どうしを加減すればよい。

乗法・除算

$$(a+jb)\times(c+jd)$$
$$=ac-bd+j(bc+ad)$$

　乗法は各項ごとに掛け合わせ、足していけばよい。ここで$j^2=-1$であるので、$jb\times jd=-bd$がでてくる。

　割り算は、分母の共役複素数を分母分子にかけて計算する。

$$\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)}$$
$$=\frac{ac+bd+j(bc+ad)}{c^2+d^2}$$

3) 共役複素数

　共役複素数とは、もととなる複素数の虚数部を正負逆転させた複素数のことである。共役複素数のマークとしてトップバーをつける、あるいはアスタリスクを上に添えるなどの表現がある。

$$(a+jb)^*=\overline{a+jb}=a-jb$$

この教科書では、トップバーを使う。

$$|a+jb|=\sqrt{(a+jb)(\overline{a+jb})}$$

の関係も覚えておきたい。

3) 複素数の分数の整理

　複素数が分数の分母に含まれる時には、できる限り分母を実数化しておくと、計

算がわかりやすくなる。分母の複素数を整理するときには、分母と分子に分母の共役複素数をかけると覚える。

$$\frac{1}{a+jb}=\frac{1\times(a-jb)}{(a+jb)(a-jb)}=\frac{a-jb}{a^2+b^2}$$

4)オイラーの公式を上手に使う

どんな複素数もオイラーの式に基づけば、大きさと角度に置き換えることができる。

オイラーの式

$$e^{i\varphi}=cos\varphi+jsin\varphi$$

$$a+jb=\sqrt{a^2+b^2}e^{j\varphi}\quad \varphi=tan^{-1}\frac{b}{a}$$

以上の関係を使うとわかりやすい事例がある。

① 複素数の逆数は大きさがその逆数になり、角度は−1倍になる。

$$\frac{1}{a+jb}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}e^{j\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{-j\varphi}$$

になる。

② 複素数の積は、複素数の大きさ同士は掛けて、角度同士は足し合わせる。

$a+jb$の角度を φ、$c+jd$の角度を θ とする。

$$(a+jb)\times(c+jd)=$$
$$\sqrt{a^2+b^2}e^{j\varphi}\times\sqrt{c^2+d^2}e^{j\theta}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}e^{j(\varphi+\theta)}$$

つまり、とある複素数をかけるということは、複素数の大きさは掛ける複素数の大きさ倍になり、角度は掛ける複素数の角度分だけ大きくなるということである。

ここで重要

オームの法則も複素数の積である。

$$V=Z\times I$$

となるが、フェーザー表示された関係においては、複素数の性質から次の関係が簡単に求められる。

大きさは掛け算

$$|V|=|Z|\times|I|$$

位相角は足し算

$$\angle V=\angle Z+\angle I$$

となる。

③ 複素数のべき乗

複素数のべき乗を計算するには、大きさと角度に直して計算すると簡単である。$(a+jb)$のn乗を計算するなら、一旦長さと角度を計算して、それぞれ、n倍してもとの複素数に戻すだけである。

$$(a+jb)^n=\left\{\sqrt{a^2+b^2}e^{j\varphi}\right\}^n$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{jn\varphi}$$

ここから、通常の複素数に戻せばよい。

例題　$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$を求めよ。

これは大きさ１、角度$^{\pi}/_{4}$である。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=e^{j4\times^{\pi}/_4}=e^{j}$$

$=\ -1$

と求められる。非常に便利な式である。

3. 複素インピーダンス

前節のように、R, L, C の各々のインピーダンスは、R、$j\omega L$、${}^{1}/_{j\omega C}$とそれぞれ表すことができる。これら組み合わせとなる回路は、すべてのインピーダンスは上記の値をもつ抵抗 R と同じ扱いで計算できる。そして**すべての R, L, C を含む線形回路のインピーダンスは、$R+jX$という複素数の形で表す**ことができ、実数の R の部分は抵抗成分、X の部分はリアクタンス成分となる。

また、$R+jX$とインピーダンスの大きさは、複素数の大きさとなる。この他、主要なインピーダンスの計算を列挙しておく。

インピーダンスの大きさ|Z|

$$|Z| = |(R + jX)| = \sqrt{R^2+X^2}$$

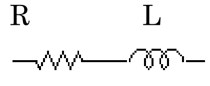
インピーダンスの位相角∠Z

$$\angle Z = \angle(R + jX) = \varphi = tan^{-1}\frac{X}{R}$$

インピーダンスの力率

$$cos\varphi = \cos\angle(R + jX) = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

R-L 直列回路



この場合抵抗 R は実数 R になるので、合成インピーダンス Z は

$$Z = R + j\omega L$$

となる。この回路の抵抗成分は R、リアクタンス成分は虚数部の L となる。インピーダンスの大きさ|Z|は、複素数の大きさとして求める。

$$|Z| = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

インピーダンスの位相角∠Z

$$\angle Z = tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

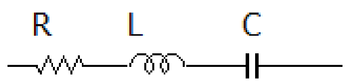
となり、力率は

$$\cos\angle Z = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

となる。

R-L-C 直列回路

R-L-C の直列回路は前章のメイン題材であるが、複素数を使うことでたちどころに計算ができる。



合成インピーダンス Z は

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

となる。このとき、$\frac{1}{j} = \frac{1\times j}{j\times j} = -j$となることに注意願いたい。インピーダンスの大きさ|Z|も、複素数の演算通りに行えばよい。

$$|Z| = \sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

インピーダンスの位相角∠Z

$$\angle Z = tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

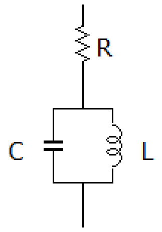
となり、力率は

$$\cos\angle Z = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

となる。

以上のように、インピーダンスの直角三角形を用いなくても、簡単にインピーダンスに関わる計算が可能になる。

例題 2　次の R−L−C 回路のインピーダンスに関わる計算をせよ。



解法)

まず、L と C の直列のインピーダンスは、

$$\frac{j\omega L\cdot\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{j\omega L\cdot j\omega C+1} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

となる。計算技法の問題であるが、分母の複素数はできる限り、分子にもっていく努力をする。

これに抵抗 R のインピーダンスを足せばよい。

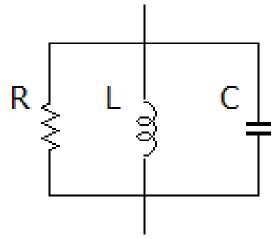
$$Z = R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}$$

$$\angle Z = tan^{-1}\frac{R(1-\omega^2 LC)}{\omega L}$$

と求められる。

例題 3　次の R-L-C のインピーダンスに関わる計算をせよ。



解法)

これも各素子は並列の抵抗と同じ扱いで求める。

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{1/j\omega C} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

となる。

インピーダンスの位相角であるが、Z の分母の複素数の角度にマイナスをつけた値となる。

$$\angle Z = -tan^{-1}\frac{1}{R\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}$$

練習問題　4

1.　次の交流の瞬時値を複素数で表せ

(a)　$\sqrt{2}\cdot 20\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$　　[V]

(b)　$\sqrt{2}\cdot 100\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$　　[A]

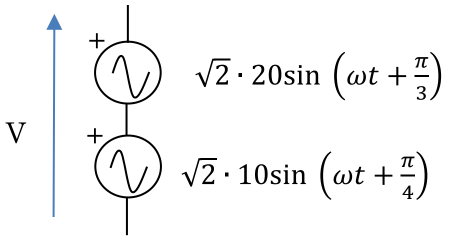
2. 次の複素数で表される交流の瞬時値を求めよ。ただし角周波数はωとする。

(a)　100　[V]

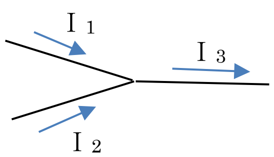
(b)　10＋10ｊ　[A]

(c)　20ｊ　[V]

3. 次の交流電圧の足し合わせた電圧の瞬時値を求めなさい。



4.　次のように接点に交流電流Ｉ$_1$とＩ$_2$が流れ込んでおり、Ｉ$_3$が流れ出ている。Ｉ$_1$は大きさが 10 A で、位相角は 0、Ｉ$_2$は大きさが 5 A で、位相角は$\frac{\pi}{4}$のときに、Ｉ$_3$を求めよ。



5.　次の複素数の計算をせよ。

(a)

$$\frac{1}{1+j2}$$

(b)

$$(1+j3)\times(2-j1)$$

(c)

$$\sqrt{1+\sqrt{3}j}$$

(d)

$$(1+j)^8$$

(e)

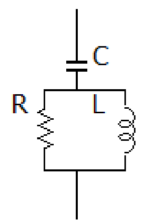
$$2e^{j\frac{\pi}{2}}+1$$

(f)

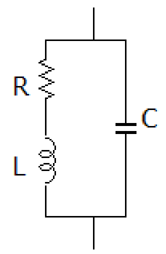
$$\frac{3+j}{j+\frac{2}{j}}$$

6.　次の回路の複素インピーダンスを求めよ。ただし角周波数はωとする。

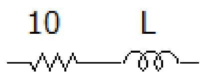
（a）



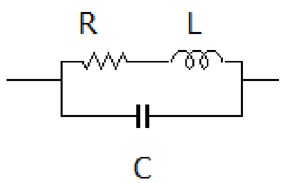
（ｂ）



7.　次の回路の複素インピーダンスを求めよ。インピーダンスの大きさが 20Ωになるときの L の値を求めよ。ただし角周波数ωは 100 rad/s とする。



8.　次の 2 端子回路の力率が最大になるときの角周波数ωを求めよ。



章末問題略解

1.

（a）$20\angle\frac{\pi}{3} = 20\left(cos\frac{\pi}{3} + jsin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 20\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + 10\sqrt{3}j$　　［V］

（b）$100\angle\frac{\pi}{2} = 100\left(cos\frac{\pi}{2} + jsin\frac{\pi}{2}\right)$

$= 100j$　［A］

2.

（a）$\sqrt{2}\cdot 100\sin\left(\omega t\right)$［V］

（b）$20\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$［A］

（c）$\sqrt{2}\cdot 20\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$［V］

3.　要は、

$\sqrt{2}\cdot 20\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}\cdot 10\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

を計算するという意味だが、せっかく複素数で計算する方法を覚えたので、複素数に変換する。

$20\left(cos\frac{\pi}{3} + jsin\frac{\pi}{3}\right)$+$10\left(cos\frac{\pi}{4} + jsin\frac{\pi}{4}\right)$

=$20\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

=17.1+24.4 j

=29.7∠55.0°　=29.7∠55.0°　＝0.960rad

求める合成電圧の瞬時値は

$$\sqrt{2}\cdot 29.7\sin(\omega t + 0.96\,rad)$$

4.　複素数で表すとこうなる。

Ｉ$_1$＋Ｉ$_2$＝10＋5$\left(cos\frac{\pi}{4} + jsin\frac{\pi}{4}\right)$

＝13.5＋3.54j　［A］

電界回路の世界では、このまま複素数表示でも答えとしては十分である。より丁寧には、大きさ 14.0Ａで位相角 14.7°の電流が流れると計算できる。

5.

（a）$\frac{1}{5} - j\frac{1}{5}$

（b）$(1 + j3)\times(2 - j1) = 5 + j5$

（c）$\sqrt{1 + \sqrt{3}j} = \sqrt{2e^{j\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{6}}$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$

（d）$(1 + j)^8 = \left(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^8$=$2^4$=16

（e）1+2j

（f）3j−1

6.

（a）ＲとＬの並列インピーダンスですが、

$\frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$

になるので、合成インピーダンスは

$\frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$

（b）

$$\frac{\frac{1}{j\omega C}(R + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

7

次の関係式が

$|10 + j100\cdot L| = 20$

$\sqrt{10^2 + (100L)^2} = 20$

より　　L=0.173 H

8

力率が 100%の 1.0 が最大。このときにインピーダンスのリアクタンス（虚数部）がゼロになる。

全インピーダンスは次の通り

$$\frac{\frac{R+j\omega L}{j\omega C}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{R+j\omega L}{1-\omega^2 LC+j\omega CR}$$

ここで分子の位相角と分母の位相角が等しいときに、全体で位相角がゼロとなり、力率が 100%となる。

$$tan^{-1}\frac{\omega L}{R}=tan^{-1}\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}$$

より、

$$\frac{\omega L}{R}=\frac{\omega CR}{1-\omega^2 LC}$$

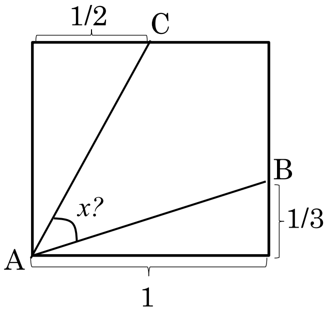
この式を解くと

$$\omega=\sqrt{\frac{L-CR^2}{L^2C}}$$

となる。

閑話休題

面白い問題を出したい。受験界で有名な問題だそうだ。次の 1 辺が 1 の正方形で、角度 x を求める。



この問題は、三角形の面積で考えるのが常套手段であろう。三角形 ABC の面積を S とすると△ABC 以外の残り部分の面積から計算すると 1/3 となる。

$$S=\frac{1}{3}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin(x)$$

より、$x=\pi/4$と求められる。

これも複素数を使うと一発で求められる。$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$を複素平面を仮定して、複素数で表すと、それぞれ

$$\overrightarrow{AB}=1+\frac{1}{3}i$$

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}+i$$

とすることができる。

$$\angle x=\angle\left(\frac{\frac{1}{2}+i}{1+\frac{1}{3}i}\right)=\angle\left(\frac{\left(\frac{1}{2}+i\right)\left(1-\frac{1}{3}i\right)}{1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right)$$

$$=\angle\left(\frac{\frac{5}{6}+\frac{5}{6}i}{\frac{10}{9}}\right)=\tan^{-1}1=\pi/4$$

つまり 45°となる。筆者も、この知識を受験生の時に知っていれば、もっと図形問題が楽に解けたと思う。数学は実に面しろい。