第 6 章　二端子対回路

大きな回路網に対して、入力の二端子、出力の二端子の対があるとして、そこでの電流と電圧の関係をマトリクス・行列で表すことができる。行列で表すことで、その中身に立ち入ることなく、伝達関数を求めたり、二端子間のインピーダンスをもとめたりするなど、有用な使い方ができる。ここではアドミッタンス行列、インピーダンス行列、継続行列について基本的な理解を図ることとする。

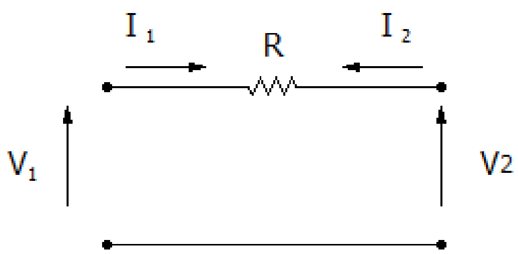
１．二端子対回路

回路網において、入力となる二端子と出力となる二端子があり、それぞれ、V_1 と V_2 の電圧が出ていて、電流として I_1 と I_2 の電流が流れているとする。

このように V_1、V_2、I_1、I_2 の関係を連立方程式であらわすときに、それをマトリクスで表示することが可能になる。

例として、次の回路を見てほしい。

簡単な抵抗 1 本のみの回路である。



これらの関係を式であらわしてみよう。

$V_1 = -I_2 R + V_2$

$I_1 = -I_2$

となる。

この結果から、

$$I_1 = \frac{V_1}{R} - \frac{V_3}{R}$$

$$I_2 = -\frac{V_1}{R} + \frac{V_3}{R}$$

以上より

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R} & -\dfrac{1}{R} \\ -\dfrac{1}{R} & \dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

が得られる。このように、V_1 と V_2 のベクトルに 2×2 の行列をかけて、I_1 と I_2 のベクトルを得るときに、この行列を**アドミッタンス行列（Y 行列）**という。

アドミッタンス行列（Y 行列）

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

一方、電流のベクトルと電圧のベクトルを入れ替えると次のような関係が得られる。

インピーダンス行列（Z 行列）

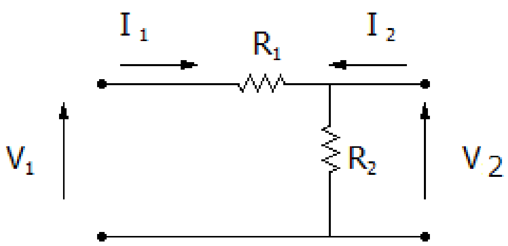
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

なおインピーダンス行列 Z はアドミッタンス行列 Y の逆行列になる。

例題 1

次の二端子回路において、Z 行列を求めなさい。



解法

上の回路から次の関係が読み取れる。

$V_1 = R_1 I_1 + V_2$

R_2 に流れる電流はキルヒホッフの法則より、$I_1 + I_2$になる。したがって、

$V_2 = R_2(I_1 + I_2)$

以上より

$V_1 = (R_1 + R_2)I_1 + R_2 I_2$

$V_2 = R_2 I_1 + R_2 I_2$

となり、Z 行列は次のようになる。

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

２．縦続行列（K 行列・F 行列）

二端子回路において、複数の二端子回路を継続して接続する場合、伝達関数や、入力インピーダンスの計算などに使われる縦続行列について説明する。

式で定義すると次のようになる。この場合 I_2 の向きが逆になっていることに注してほしい。

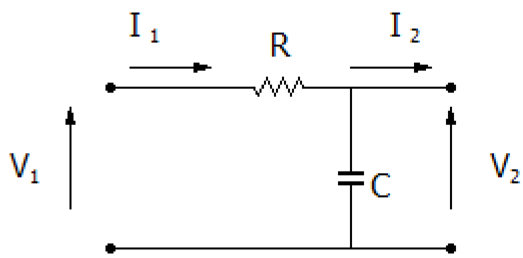
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

で表されるときに、

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

K 行列（または F 行列）という。使い方については、例題を通して解説する。

例題２　次の回路の K 行列を求めなさい。



解法

この場合、角周波数 ω の交流回路であるとみなして、C のインピーダンスは$\frac{1}{j\omega C}$として考える。

$$V_1 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_1 - \frac{1}{j\omega C} I_2$$

$$V_2 = \frac{1}{j\omega C}I_1 - \frac{1}{j\omega C}I_2$$

この式から次が求められる。

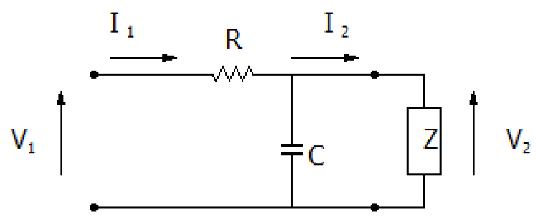
$$V_1 = (1 + j\omega CR)V_2 + RI_2$$
$$I_1 = j\omega CV_2 + I_2$$

したがって、K 行列はつぎのようになる。

$$K = \begin{bmatrix} 1 + j\omega CR & R \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$$

例題 3

例題 2 の回路において、出力端子にインピーダンス Z をつけたときの、入力インピーダンスV_1/I_1を求めよ。



解法　例題 2 より

$$V_1 = (1 + j\omega CR)V_2 + RI_2$$
$$I_1 = j\omega CV_2 + I_2$$

が成り立つ。これらから

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{(1+j\omega CR)V_2+RI_2}{j\omega CV_2+I_2}$$
$$= \frac{(1+j\omega CR)\frac{V_2}{I_2}+R}{j\omega C\frac{V_2}{I_2}+1}$$

$\frac{V_2}{I_2} = Z$ であることから

入力インピーダンスは

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{(1+j\omega CR)Z+R}{j\omega CZ+1}$$

となる。

例題 4

例題 2 の回路において、出力端子にインピーダンス Z をつけたときの、伝達関数 $G(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$を求めよ。

解法

例題 2 より、

$$V_1 = (1 + j\omega CR)V_2 + RI_2$$

また、$\frac{V_2}{I_2} = Z$より

$$V_1 = (1 + j\omega CR)V_2 + R\frac{V_2}{Z}$$

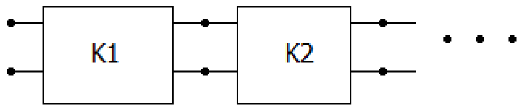
以上より

$$G(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + j\omega CR + \frac{R}{Z}}$$
$$= \frac{Z}{Z + R + j\omega CRZ}$$

となる。

$\boxed{\text{縦続行列の重要な性質}}$

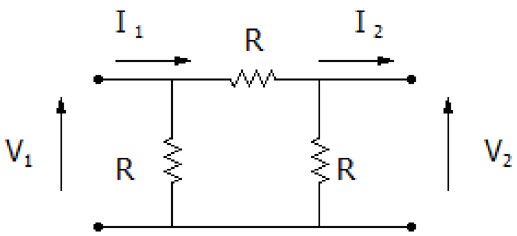
縦続して回路が接続されているときに、全体の K 行列はここの K 行列の行列積であらわされる。



全体のK行列は各K行列の行列積

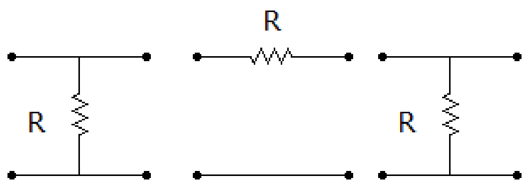
例題 5

次の二端子回路の K 行列を求めなさい。



解法

この π 型の回路は次のように分割し、各 K 行列を求める。



一番左の K_1 行列は

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$ となる。

真ん中の K_2 行列は、

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ となる。

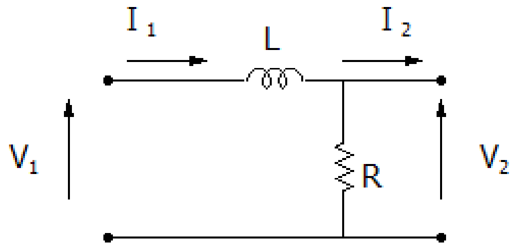
全体では、

$$K_1K_2K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & R \\ \frac{3}{R} & 2 \end{bmatrix}$$

となる。

6 章　練習問題

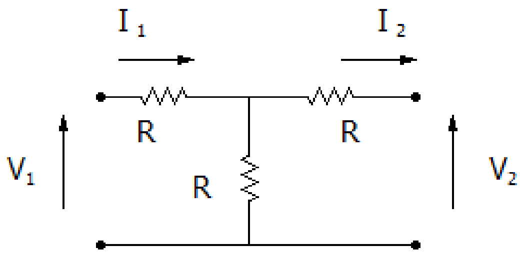
1. 次の回路の K 行列を求めなさい。



2.　1 の問題の回路において、出力端子にインピーダンス Z が接続されたときに、入力インピーダンス V_1/I_1 を求めよ。

3.　1 の問題の回路において、出力端子にインピーダンス Z が接続されたときに、伝達関数 $G(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

4.　次の回路の K 行列を求めよ。



---

6 章　練習問題略解

1.　つぎの関係がなりたつ。

$$V_1 = \left(1 + \frac{1}{R}\right)V_2 + j\omega L I_2$$
$$I_1 = \frac{1}{R}V_2 + I_2$$

したがって、K 行列はつぎのようになる。

$\mathrm{K}=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{R} & j\omega L \\ \frac{1}{R} & 1\end{bmatrix}$ となる。

2.　問題 1 の答えより

$$\frac{V_1}{I_1}=\frac{\left(1+\frac{1}{R}\right)V_2+j\omega LI_2}{\frac{1}{R}V_2+I_2}$$

$=\frac{\left(1+\frac{1}{R}\right)Z+j\omega L}{\frac{1}{R}Z+1}=\frac{(R+1)Z+j\omega LR}{Z+R}$

なお Z は、$\frac{V_2}{I_2}$である。

3.　この問題も例題 5 の通りの方法で全体の K 行列をもとめることができる。

$$\mathrm{K_2K_1K_2}=\begin{bmatrix}1 & R \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & R \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 3R \\ \frac{1}{R} & 2\end{bmatrix}$$

となる。