第 7 章　二階微分方程式と過渡現象

これまで、交流信号が定常的であるとして、回路を複素インピーダンスで線形方程式にして解く練習をしてきた。しかし、非定常な状態、これを過渡というが、このときの回路の電流や電圧の変化を求めるためには、微分方程式をたてて解く必要がある。やり方としては、数学的に微分方程式を解くか、ラプラス変換を使うかである。ここでは、微分方程式として二階微分方程式を使っての回路問題の解き方に慣れたいと思う。二階微分方程式は様々な物理現象でも見ることができ、回路の勉強を通して、制御や計測などに使う微分方程式問題の知識を得ることになる。

１．二階微分方程式の解き方

次のような微分方程式の解を解くことを目標にしよう。

$$y'' + ay' + by = c \qquad (1)$$

y は時間 t の関数であり、

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} \quad y' = \frac{dy}{dt}$$

とする。a, b, cはそれぞれ定数である。なお、c は強制項とも呼ばれ、ここを時間 t の関数とする場合もある。この形の微分方程式を電気回路では解く機会は極めて多い。

この方程式の一般解は、余関数と特解の和となる。この証明は数学の教科書に任せたい。

余関数の求め方

問題の式の右項（強制項）c を 0 とし、余関数の候補として

$$y = Ae^{mt}$$

を代入して m を決定する。A は、y の初期値 y(0)あるいは、収束値 y(∞)を参考に決定する。

(1) 式の右項を 0 として、$y = Ae^{mt}$を代入すると、

$$Am^2e^{mt} + aAme^{mt} + bAe^{mt} = 0$$

となり、

$$m^2 + am + b = 0$$

となる。この方程式を解の公式を使ってmの値を求める。これは 2 次方程式であるので、判別式が正である場合は、実数解をもつ。判別式が 0 である場合は、重解となる。判別式が負であれば複素数の解を２つもつ。

判別式＞0 の場合　$a^2 - 4b > 0$

αとβがmの 2 次方程式の解とすると、

$$y = A_1e^{\alpha t} + A_2e^{\beta t}$$

が余関数となる。A_1、A_2は定数である。これら定数は初期値から推定する。このときの余関数は基本的に単純な減衰波形あるいは指数関数波形となる。

判別式＝0 の場合　$a^2 - 4b = 0$

αを二次方程式の重解であるとすると、

$$y = A_1e^{\alpha t} + A_2te^{\alpha t}$$

が余関数となる。A_1、A_2は定数である。これら定数は初期値から推定する。このときの余関数も減衰波形となる。

判別式＜0 の場合　$a^2 - 4b < 0$

αとβが m の 2 次方程式の解とすると、

両者とも複素数になる。

$$y = A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{\beta t}$$

が余関数となる。A_1、A_2は定数である。これら定数は初期値から推定する。このときの余関数は振動波形、あるいは振動しながら減衰する波形になる。

特解の求め方

c が定数であれ､y の特解は定数になる。y＝k（定数）とおいて、k を決定すればよい。k の一階微分、二階微分ともに 0 になるので、(1)式は

bk = c

となり、特解は

$y = \frac{c}{b}$

となる。

以上余関数と特解がもとまったところで、この微分方程式の一般解は

y= 余関数＋特解

が答えになる。

[特解の候補]

$y'' + ay' + by = c$　において、右辺の c が時間の関数である場合、特解の候補として次があげられる。

右辺関数 c(t)	特解の候補 注）候補ということで必ず当てはまる訳ではない。
定数　l_0	定数　k_0
時間 t の多項式 $l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \cdots$	時間 t の多項式 $k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots$
正弦波、余弦波 $l_0 sin(\omega t + l_1)$ あるいは $l_0 cos(\omega t + l_1)$	正弦波、余弦波 $k_0 sin(\omega t) + k_1 cos(\omega t)$ この代わりに次を用いてもよい $k_0 sin(\omega t + k_1)$
指数関数 $l_0 e^{l_1 t}$	指数関数 $k_0 e^{l_1 t}$

例題 1　次の二階微分方程式を解きなさい。

(1)

$$y'' - 5y' + 6y = 3$$

(2)

$$y'' + y' + 3y = 0$$

(3)

$$y'' + 5y' + 6y = t$$

(4)

$$y'' + y' + y = e^{-t}$$

解答

(1)この場合、まず右辺をゼロとして、$y = Ae^{mt}$　とおいて解いてみる。

$$y'' - 5y' + 6y$$
$$= Am^2 e^{mt} - 5Ame^{mt} + 6Ae^{mt} = 0$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$m = 2,\ 3$となり、余関数はつぎの二関数になる。

$$y = A_1 e^{2t}$$
$$y = A_2 e^{3t}$$

したがって、この関数の和も余関数になる。

$$y = A_1 e^{2t} + A_2 e^{3t}$$

特解であるが､右辺が定数であるため､特解を定数 k とおいてみる。y''とy'は定数の微分となり、0 となる。

$$y'' - 5y' + 6y = 6k = 3$$

$$k = \frac{1}{2}$$

一般解は余関数と特解の和となるので、

$$y = A_1 e^{2t} + A_2 e^{3t} + \frac{1}{2}$$

となる。なお、A_1、A_2は y の初期値があれば決定できる。

(2) この場合、右辺はゼロであり、特解は考えなくてよい。$y = Ae^{mt}$ とおいて余関数を求める。

$$y'' + y' + 3y = Am^2 e^{mt} + Ame^{mt} + 3Ae^{mt} = 0$$

$$m^2 + m + 3 = 0$$

$$m = \frac{-1 \pm j\sqrt{11}}{2}$$

となる。余関数は二関数の和となり、

$$y = A_1 e^{\frac{-1+j\sqrt{11}}{2}t} + A_2 e^{\frac{-1-j\sqrt{11}}{2}t}$$

となり、A_1、A_2は初期値が与えられれば決定できる。これをさらに展開してみよう。

$$y = A_1 e^{\frac{-1+j\sqrt{11}}{2}t} + A_2 e^{\frac{-1-j\sqrt{11}}{2}t}$$

この式のイメージを得るために、仮に、$A_1 = A_2$となる場合を考える。オイラーの式を使って展開すると、

$$A_1 e^{\frac{-1}{2}t}\left\{cos\frac{\sqrt{11}}{2}t + jsin\frac{\sqrt{11}}{2}t + cos\frac{\sqrt{11}}{2}t - jsin\frac{\sqrt{11}}{2}t\right\}$$

$$= 2A_1 e^{\frac{-1}{2}t} cos\frac{\sqrt{11}}{2}t$$

と求められる。これは、振動しながら減衰していく波形になる。

(3)　これも　$y = Ae^{mt}$ とおいて解いてみる。すると、特性方程式は、

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

となり、$m = -2, -3$と求められ、余関数は次のようになる。

$$y = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

特解であるが、右辺が t なので、特解を

$y = k_0 + k_1 t$

としてみる。

$$y'' + y' + 3y = k_1 + k_0 + k_1 t = t$$

係数比較により、$k_1 = 1, k_0 = -1$となる。以上より、特解は$y = -1 + t$ということになる。一般解は次の形になる。

$$y = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + t - 1$$

(4)右辺をゼロとして、$y = Ae^{mt}$ とおいて余関数を求める。

$$y'' + y' + y = Am^2 e^{mt} + Ame^{mt} + Ae^{mt} = 0$$

$$m^2 + m + 1 = 0$$

$$m = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

となる。したがって余関数は次のように計算できる。

$$y = A_1 e^{\frac{-1}{2}t} e^{\frac{j\sqrt{3}}{2}t} + A_2 e^{\frac{-1}{2}t} e^{\frac{-j\sqrt{3}}{2}t}$$

と求められる。

特解であるが、

$$y = k_0 e^{-t}$$

が候補となる。

$$y'' + y' + y = k_0 e^{-t} - k_0 e^{-t} + k_0 e^{-t} = e^{-t}$$

より、$k_0 = 1$となる。

一般解は特解と余関数の和で表される。

$$y = e^{-t} + A_1 e^{\frac{-1}{2}t} e^{\frac{j\sqrt{3}}{2}t} + A_2 e^{\frac{-1}{2}t} e^{\frac{-j\sqrt{3}}{2}t}$$

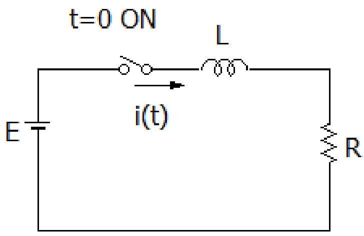
A_1、A_2は初期値が与えられれば決定できる。

2．過渡現象の計算事例

二階線形微分方程式の解法を使うとかなりの種類の過渡現象を扱うことができる。ここではいくつか事例をもって解いていくことにする。

(1)L-R 回路

図のように L と R の直列回路がある。t ＝0 でスイッチが ON されたときに、流れる電流 $i(t)$を求めてみる。



この回路の微分方程式は次が成り立つ。

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri = Li' + Ri$$

余関数として、$i = Ae^{mt}$ とおいて求める。

$$Li' + Ri = LAme^{mt} + RAe^{mt} = 0$$

よって、

$$m = -\frac{R}{L}$$

となる。余関数は

$$i = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

となる。特解数は

$$i = \frac{E}{R}$$

となる。

一般解は、

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

である。A を決定するのに、初期値を考慮する。

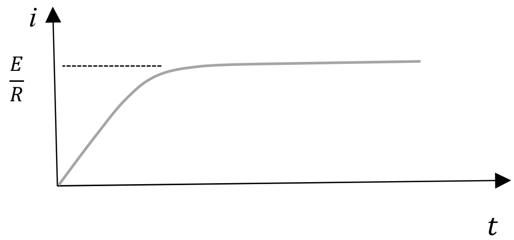
スイッチが ON された瞬間、コイルに急に電圧がかかり、∞の抵抗のように振る舞う。(2 章参照) したがって、

$$i(0) = 0$$

となるため、次のように答えが求められる。

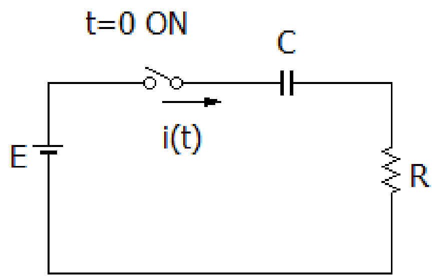
$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

i(t)の形は次のように書ける。



(2)C-R 回路

図のように C と R の直列回路がある。t ＝0 のときにスイッチが ON されたときに、流れる電流 $i(t)$を求めてみる。C には t ＝0 のときに全く電荷が蓄えられていないとする。



この回路の微分方程式は次が成り立つ。

$$E = \frac{1}{C}Q(t) + Ri \qquad (1)$$

$Q(t)$はコンデンサ C に蓄えられている電荷である。

$$\frac{dQ(t)}{dt} = i$$

である。電流の向きとして、コンデンサから出ていく方向に電流が定義されている場合は、電流 i にマイナスをつけるので、注意が必要である。(1)式を時間微分すると、

$$\frac{1}{C}i + Ri' = 0$$

となる。これの余関数はつぎのようになる。

$$i = Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

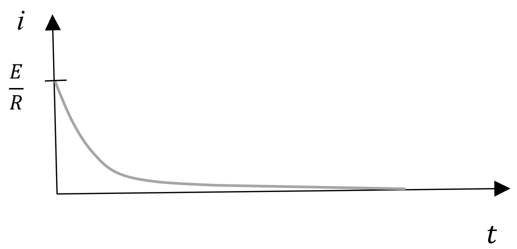
なお、初期値についてだが、コンデンサ急に電圧をかけられると、0Ωの抵抗として振る舞うために、初期電流は

$$i(0) = \frac{E}{R}$$

となる。よって、

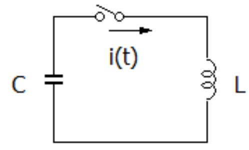
$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$$

となる。i(t)の形は次のように書ける。



(3)L-C 共振回路の事例

時刻 t ＝0 でコンデンサにたまっている電荷が放電されるとする。この電流波形を求める。



＊コンデンサにはt=0の時点でQ₀ [C]の電荷があるとします。

次の方程式がたてられる。

$$\frac{1}{C}Q(t) = L\frac{di}{dt}$$

両辺を時間微分する。このとき i の方向は、コンデンサから出ていく方向なので、i にマイナスをつける。

$$-\frac{1}{C}i = Li''$$

となる。

$$i'' + \frac{1}{LC}i = 0$$

余関数として、$i = Ae^{mt}$ とおいて求める。

$$Am^2e^{mt} + \frac{1}{LC}Ae^{mt}=0$$

したがって、

$$m = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}j$$

となる。二つの解において係数 A が異なることもあり得るので、次のようになる。

$$i = A_1e^{\frac{1}{\sqrt{LC}}jt} + A_2e^{-\frac{1}{\sqrt{LC}}jt} \qquad (2)$$

となる。

初期値であるが、L が∞のインピーダンスとして働く。したがって、$i(0) = 0$となる。(2)式に導入すると、

$$A_1 + A_2 = 0 \qquad (3)$$

また、t=0 のときに、コンデンサの両端の電圧は、${Q_0}/{C}$の電圧あるため、

$$\frac{Q_0}{C} = L\frac{di}{dt} \qquad (t=0)$$

がなりたつ。これを導入すると、

$$\frac{Q_0}{C} = L\left(A_1\frac{1}{\sqrt{LC}}j - A_2\frac{1}{\sqrt{LC}}j\right)$$

$$A_1 - A_2 = -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}j \qquad (4)$$

となる。
(3)、(4)式より、

$$A_1 = -\frac{Q_0}{2\sqrt{LC}}j$$

$$A_2 = \frac{Q_0}{2\sqrt{LC}}j$$

となる。一般解は次のように変形される。

$$i(t) = A_1 e^{\frac{1}{\sqrt{LC}}jt} + A_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{LC}}jt}$$

$$= A_1\left\{cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + jsin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right\}$$

$$+A_2\left\{cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) - jsin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right\}$$

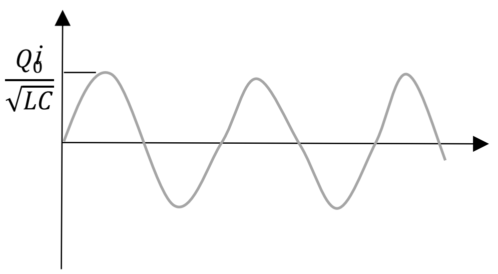
$$= -\frac{Q_0}{2\sqrt{LC}}j \times j2sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

$$=\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\ sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

となる。これは、周期$2\pi\sqrt{LC}$、周波数 f とすれば、

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

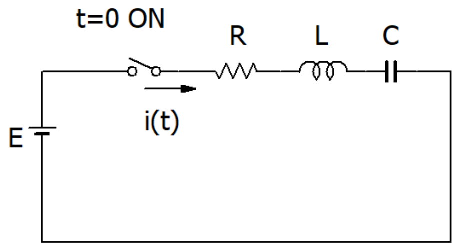
の振動波形になる。



長い計算であったが、慣れれば同じパターンの繰り返しである。技術者としての勘として、L と C が共存する回路では、振動波形は出やすいと覚えておくべきである。強制項が定数の二階微分方程式の数学解は、指数関数か、定数か、あるいは振動、または振動減衰に大別されるが、その大別は微分方程式の係数にとる判別式で分類される。詳しくは、次の節で述べる。

３．RLC 直列回路を題材にした電流波形の計算例と臨界制動

この回路を事例として、電流波形が指数関数になるか、振動になるかを考えてみる



電流の回路方程式は次のように書くことができる。

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

両辺を時間で微分すると、二階微分方程式が得られる。

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = 0$$

となる。

ここで特解は 0 であるので、余関数のみを求めに行く。$i = Ae^{mt}$ とおくと、m に関する二次方程式が得られる。

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$$

ここでmの判別式をといて、mの解の性質で分類する。

1) 判別式が正の場合

$R^2 - \frac{4L}{C} > 0$の場合であるが、この場合 m は二つの実数解をとり、余関数は次のように書ける。二つの解をα、βとすれば

$$i(t)=A_1e^{\alpha t}+A_2e^{\beta t}$$

となり、

$$\alpha=\frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}$$

$$\beta=\frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}$$

となる。ここで、判別式の条件より$R^2-\frac{4L}{C}>0$であるため、

$$-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}<0$$

となる。つまり、α も β も必ず、負の値をとる。

ここで電流 i の初期値を考える。コイルは急激に電圧を変えると、∞のインピーダンスになるので、電流 i の初期値はゼロになる。

$$i(t)=A_1e^{\alpha t}+A_2e^{\beta t}$$

にt＝0 を代入すると、

$$A_1+A_2=0$$

となる。

$$i=A_1(e^{\alpha t}-e^{\beta t})$$

となる。この状態で、元の微分方程式にいれてみる。コンデンサの電荷$Q(0)=0$とすると、

$$E=Ri+L\frac{di}{dt}$$

となり、

$$E=A_1\left(e^{\alpha t}-e^{\beta t}\right)+ LA_1(\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t})\,|_{t=0}$$

$$E=LA_1(\alpha-\beta)$$

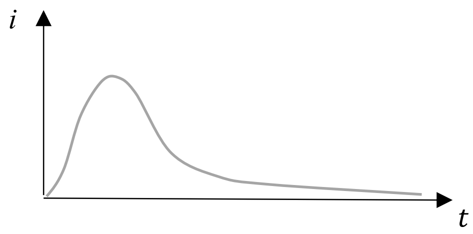
となり、

$$A_1=\frac{E}{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}$$

となる。したがって、電流 i(t)は

$$i=\frac{E}{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}(e^{\alpha t}-e^{\beta t})$$

となる。その概形は次のようになる。



2) 判別式が負の場合

$R^2-\frac{4L}{C}<0$の場合であるが、この場合は解 α、β とも複素数となる。

$$\alpha=\frac{-R+j\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}$$

$$\beta=\frac{-R-j\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}$$

電流の式は、次のようになる。

$$i=A_1e^{\alpha t}+A_2e^{\beta t}$$

$$=A_1e^{-\frac{R}{2L}t}e^{\frac{j\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}}+A_2e^{-\frac{R}{2L}t}e^{\frac{-j\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}}$$

となる。電流 i の初期値はゼロになることより、

$$A_1+A_2=0$$

となる。

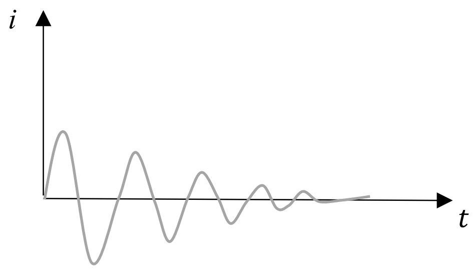
$$i=A_1e^{\alpha t}+A_2e^{\beta t}$$

$$=A_1(e^{-\frac{R}{2L}t}e^{\frac{j\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}}-e^{-\frac{R}{2L}t}e^{\frac{-j\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}})$$

この式で、$e^{-\frac{R}{2L}t}$は指数関数的な減衰であ

り、$e^{\frac{j\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}}$の部分は第 2 項と差し引きされることで、振動関数$sin(\omega t + k_1)$の形で表される。

判別式が負の場合は、振動が徐々に減衰する波形となる。ただし、R がゼロの場合は、振動が永遠に持続する。



3) 判別式がゼロの場合

この場合$\left(R^2 - \frac{4L}{C} = 0\right)$は、余関数は次のようになる。

$$i = A_1 e^{mt} + A_2 t e^{mt}$$

これを代入してみる。ここで電流の初期値がゼロなので、$A_1 = 0$となる。

$$i = A_2 t e^{mt}$$

これを最初の微分方程式にいれると、

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i$$

$$= LA_2 t m^2 e^{mt} + 2LA_2 m e^{mt} + RA_2 e^{mt}$$

$$+ RA_2 t m e^{mt} + \frac{1}{C} A_2 t e^{mt}$$

$$= 0$$

$$Ltm^2 + 2Lm + R + Rtm + \frac{1}{C} t = 0$$

ここで

$$m = \frac{-R}{2L}$$

とすると、上記等式はなりたつ。

$$i = A_2 t e^{\frac{-R}{2L}t}$$

となる。

A_2であるが、t ＝0 のときに、i=0 であり、

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

が成り立ち、これにいれて決定する。

$$E = LA_2 t e^{\frac{-R}{2L}t} + LA_2 e^{\frac{-R}{2L}t} + LA_2 t \left(\frac{-R}{2L}\right) e^{\frac{-R}{2L}t}$$

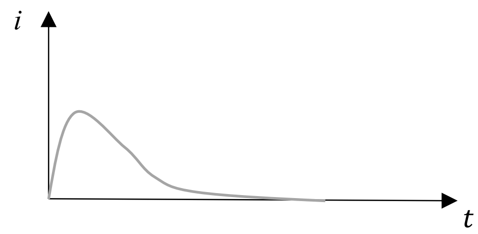
｜t=0

$$A_2 = \frac{E}{L}$$

以上より、

$$i = \frac{E}{L} t e^{\frac{-R}{2L}t}$$

と求められる。



以上、微分方程式で波形が大きく変わることが分かった。判別式が正の場合は減衰、負の場合は振動減衰、そして判別式が 0 の場合も減衰となるが、正の場合に比べて減衰は速い。判別式が 0 のときを**臨界制動**いう。臨界制動は単純に、振動するかどうかの分岐点であるだけではなく、もっとも速やかに終値に収束する条件であるといえる。

二階微分方程式で示される回路や制御システムにおいて、この臨界制動になるよ

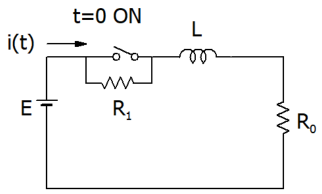
うに素子の定数を選ぶことで、高速に信号を安定させせることが可能になる。これは制御回路の高速応答のための基本的な概念として理解していただければ幸いである。

向学のために

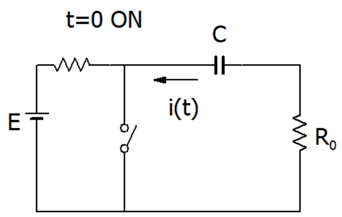
　二階微分方程式の解説を中心に回路の過渡現象を計算する手法を解説した。以上示された回路事例より複雑になる場合は、ラプラス変換を使って解くことになる。ラプラス変換は複雑微分方程式を変数 s とした代数式に替えて、解を求めていく手法である。回路以外の分野でも非常に役に立つ知識である。これについては 8 章以降で解説していくことにする。

7 章　練習問題

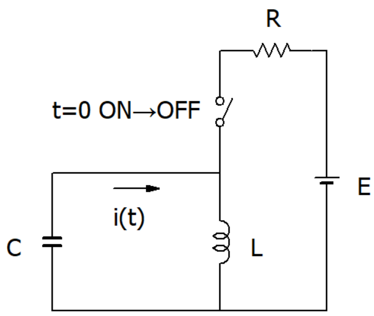
1. 次の回路でに SW が ON となるとして、電流 i(t)の波形をもとめなさい。



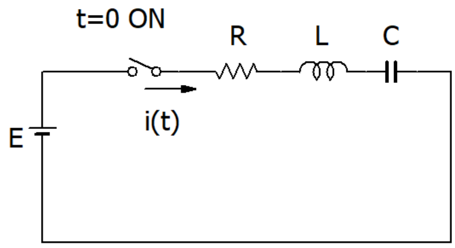
2. 次の回路で $t=0$ のときに SW が ON となるとして、電流 i(t)の波形をもとめなさい。



3. 次の回路で $t=0$ のときに SW が OFF から ON に変わるときに、電流 i(t)の波形をもとめなさい。



4. 次のような回路において、スイッチがオンさせると、電流に振動波形が現れて、周辺に電磁ノイズが現れることが分かった。電磁ノイズを起こさないためには R をどのような条件に設定すればよいか。



7 章　練習問題略解

1.　初期電流を求める。

ON 以前では、L は定常状態で 0Ω とみなし、i(0)は $E/(R_0+R_1)$である。

SW オンの後は、次の微分方程式が成り立つ。

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri = Li' + R_0 i$$

この微分方程式の一般解は、

$$i(t) = \frac{E}{R_0} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

となり、

$$i(0) = \frac{E}{R_0} + A = \frac{E}{R_0+R_1}$$

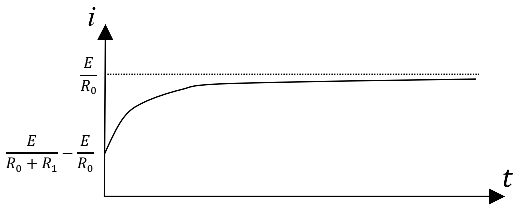
である。

$$A = \frac{E}{R_0+R_1} - \frac{E}{R_0}$$

より、

$$i(t) = \frac{E}{R_0} + \left(\frac{E}{R_0+R_1} - \frac{E}{R_0}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

となる。

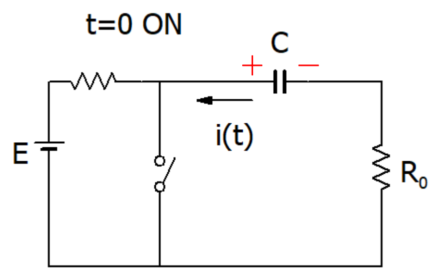


2.　t=0 以前では、C は∞抵抗の状態であり、E[V]の電圧がかかっている。これが SW が ON になった場合、R_0 と C の閉路になる。ここを流れる初期電流は、E/R_0 である。なお C の電圧の向きは図の赤字で示す通りである。

微分方程式は次のとおりである。

$$\frac{1}{C}Q(t) + R_0 i = 0$$

$$\frac{1}{C}i + R_0 i' = 0$$



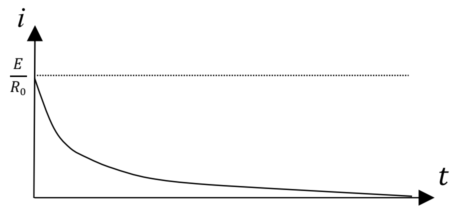
この余関数はつぎのようになる。

$$i(t) = Ae^{-\frac{1}{CR_0}t}$$

$i(0) = \frac{E}{R_0}$より、

$$i(t) = \frac{E}{R_0}e^{-\frac{1}{CR_0}t}$$

となる。



3.　t =0 以前は、コイル L に E/R[A]の電流が流れている。SW がオフになった瞬間コイルがコンデンサにその電流を流そうとする。したがって、i(0)は E/R である。

$$\frac{1}{C}Q(t) = L\frac{di}{dt}$$

両辺を時間微分する。このとき i の方向は、コンデンサから出ていく方向なので、i にマイナスをつける。

$$-\frac{1}{C}i = Li''$$

となる。

$$i'' + \frac{1}{LC} i = 0$$

余関数として、$i = Ae^{mt}$ とおいて求める。

$$Am^2 e^{mt} + \frac{1}{LC} Ae^{mt} = 0$$

したがって、

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} j$$

となる。二つの解において係数 A が異なることもあり得るので、次のようになる。

$$i = A_1 e^{\frac{1}{\sqrt{LC}} jt} + A_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{LC}} jt} \qquad (5)$$

となる。

$i(0) = \mathrm{E/R}$なることより、(5)式に導入すると、

$$A_1 + A_2 = \mathrm{E/R} \qquad (3)$$

また、t=0 のときに、コンデンサの両端の電圧は、急に電流が入っても 0 Ωのインピーダンスとして振る舞うのでゼロである。

$$L\frac{di}{dt} = 0 \ \ (t = 0)$$

がなりたつ。これを導入すると、

$$0 = L\left(A_1 \frac{1}{\sqrt{LC}} j - A_2 \frac{1}{\sqrt{LC}} j\right)$$

より、

$$A_1 - A_2 = 0$$

となる。

$$A_1 = A_2 = \frac{E}{2R}$$

となる。一般解は次のように変形される。

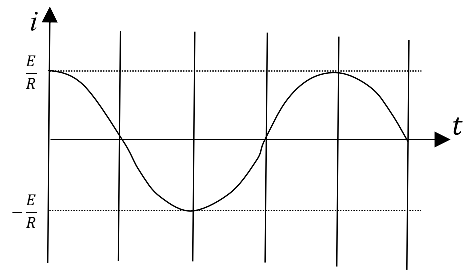
$$i(t) = A_1 e^{\frac{1}{\sqrt{LC}} jt} + A_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{LC}} jt}$$

$$= \frac{E}{2R}\left\{cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + jsin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)\right\}$$

$$+ \frac{E}{2R}\left\{cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) - jsin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)\right\}$$

$$= \frac{E}{R} \, cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$$

となり、余弦振動波形となる。



4.　この回路において、スイッチが ON の後の回路方程式は次のようになる。

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C} i = 0$$

電流iの解は、その余関数になり､。$i = Ae^{mt}$ とおくと、m に関する二次方程式が得られる。

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$$

電流 i の振動する条件は、m の判別式が負になるときであり、すなわち$R^2 - \frac{4L}{C} < 0$ のときである。つまり、振動を抑える条件は $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$となる。$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$のとき臨界制動となり､電流 i は最も短時間で､0 に収束する。