電磁気学基礎　6章　アンペールの式・円電流の作る磁場

計算

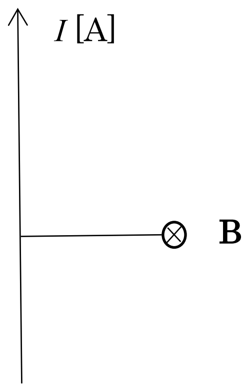
1.　アンペールの式

ある円環Cがあるとき、Cと鎖交する全電流について次の式が成り立つ。

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \times (\text{円環 C と鎖交する全電流})$$

積分範囲のCとは、ループ（環になっている）になっている経路がCということである。線積分とは、あるベクトルを経路の接線方向と平行な成分を経路に沿って足し合わせていくという意味である。もし磁束密度 **B** が経路にそって平行で場所によらず一定であれば、積分値はBの大きさ×（経路の距離）になる。右項にある鎖交とありますが、これは円環Cを貫いているという意味である。

2.　無限直線電流の作る磁束密度の計算



電流Iが下から上へ一直線にながれているとします。そこから等距離にある半径rの円環をCとしましょう。図の通り、磁束密度は円をなして巻いています。このときに磁束密度Bは円環に平行になり、どこも一定の大きさであります。したがって、アンペールの式の左項は、経路距離×磁束密度の大きさ、つまり

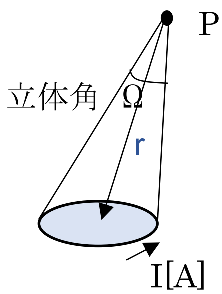
$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r \times B$$

となります。上の2πrは円環Cの経路、すなわち円周になります。

$$2\pi r \times B = \mu_0 I$$

がなりたち、$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$がなりたちます。

3.　円電流の作る磁場の計算



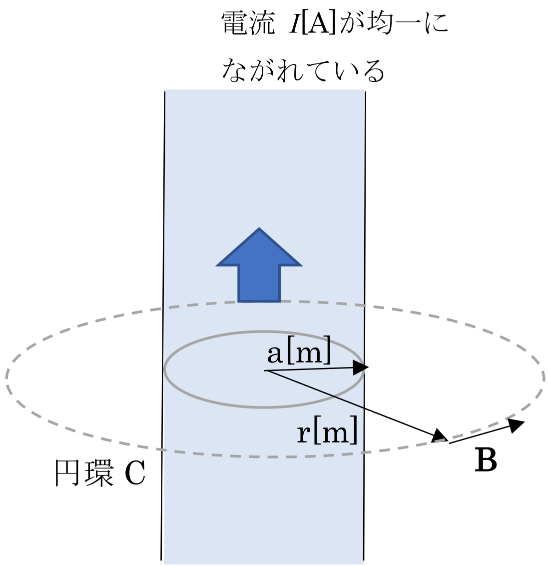
円電流Iがあるときに、それを見込む立体角を$\Omega(P)$とする。P点での磁位Φは、

$$\emptyset = \frac{\mu_0}{4\pi} I\Omega(P)$$

点Pでの磁束密度Bは　$B = -grad\,\emptyset$で計算される。

例題１　無限に伸びる棒状電流 I [A]が半径 r[m]の位置に作る磁束密度を求めなさい。棒の半径は a[m]とする。透磁率はμ_0とする。

解答



r>a の場合

アンペールの式の左項はかわらない。

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r \times B$$

右項は鎖交する電流になるので、

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r \times B = \mu_0 I$$

となり、$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$と求められる。

r＜a の場合

アンペールの式の左項に変化はなく、右項がかわる。

円環 C を流れる鎖交する電流は　$I \times \frac{\text{半径 r の面積}}{\text{半径a の面積}} = I\frac{\pi r^2}{\pi a^2} = I\frac{r^2}{a^2}$となる。

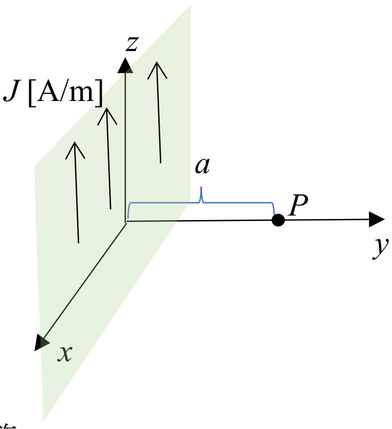
$$2\pi r \times B = I\frac{r^2}{a^2}$$

したがって

$$B = I\frac{r}{2\pi a^2}$$

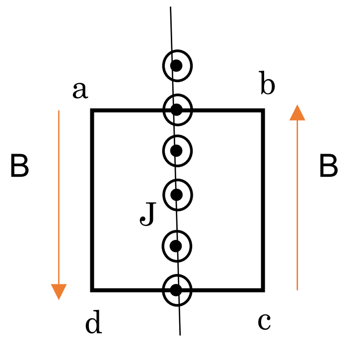
となる。

例題 2　面状電流の問題　図のように xz 平面に z 軸に沿って電流が流れている。単位長さの幅当たり、J [A]流れるとする。xz 平面から距離 a[m]の位置にできる磁束密度の大きさを求めなさい。



解答

xz 平面を上からみた図を示す。図のように abcd の□のループを考える



磁束密度のベクトルは図のような方向になり、xz 平面に対して対象と考えられる。

この□のループのアンペールの式をたてる。

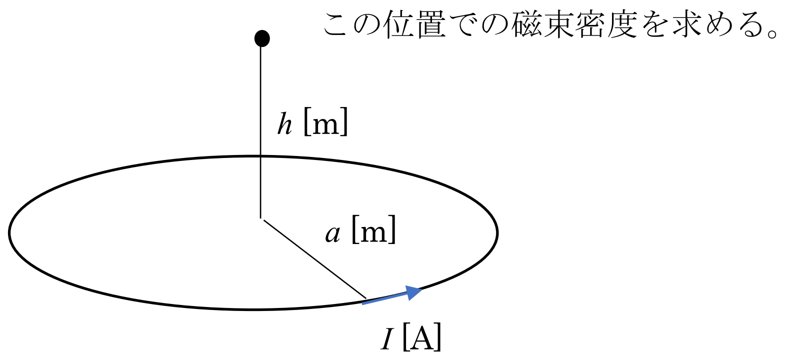
ad 間と cb 間の長さを 1 と仮定すると、

$$\int_{abcd} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{bc} Bdl + \int_{da} Bdl = 2B = \mu_0 J$$

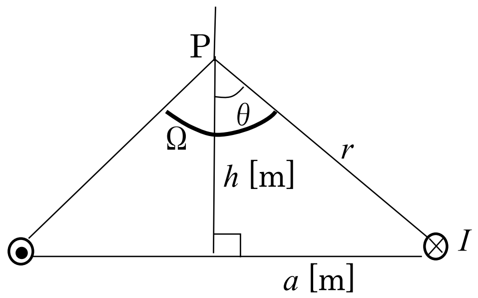
となる。なお、ab 間と cd 間は磁束密度 B と線積分の経路が直交するため、0 となる。

したがって、磁束密度 B の大きさは$\frac{\mu_0 J}{2}$となる。

例題３　円電流の作る磁場の計算　図のように半径 a[m]の I [A]の円環電流が高さ h[m]の位置に作る磁束密度を求めよ。（磁位から導出）



下の図のように断面を考える。



点 P から円環を見る立体角Ωは、

$$\Omega = 2\pi(1 - cos\theta) \qquad \text{（公式）}$$

となる。したがって磁位Φ

$$\emptyset = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega(P) = \frac{\mu_0 I}{2}(1 - cos\theta)$$

となる。

より、

$$\emptyset = \frac{\mu_0 I}{2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)$$

となる。磁束密度は高さｈ方向の勾配のマイナスをもとめればいいので、

$$B = -\frac{\partial\emptyset}{\partial h} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(h^2+a^2)^{3/2}}$$

と求められる。

例題 4 ［演算子の練習］$(x\,,y,z)$の位置でのベクトル **E** が次のように定義されている。

$$\boldsymbol{E} = (\frac{x}{x^2+y^2}\,,\frac{y}{x^2+y^2},0)$$

このとき、$div\boldsymbol{E}$と$rot\boldsymbol{E}$を計算しなさい。

div は発散の演算子である。

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

になります。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

より、$div\boldsymbol{E} = 0$となる。

rot は回転の演算子である。

$$rot\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\,,\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$である。

どの偏微分で z が絡むものはすべてゼロである。

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

より、$rot\boldsymbol{E} = (0,0,0\,)$である。