高校数学の復習 10　漸化式の解き方全通り 1

まずは問題を与えますので、解いてみましょう。

1. 次の漸化式の一般項を示しなさい。

等差数列

$a_{n+1} = a_n + 2$　但し $a_1 = 2$

等比数列

$b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$　但し $b_1 = 2$

2. 次の漸化式の一般項を示しなさい。

$c_{n+1} = 3c_n + 7$　但し $c_1 = 2$

3. 次の漸化式の一般項を示しなさい。

(1)

$d_{n+1} = 3d_n + 4n - 2$　但し $d_1 = 2$

(2)

$f_{n+1} = 2f_n + 3n^2 - 5n - 4$　但し $f_1 = 1$

漸化式は基本として、等差数列、等比数列に分類できます。

等差数列

$x_{n+1} = x_n + d$　dは公差と呼ばれます。

この一般解は

$x_n = x_1 + d(n-1)$

となります。

等比数列

$y_{n+1} = ry_n$　rは公比と呼ばれます。

この一般解は

$y_n = r^{n-1}y_1$　となります。

問題の答え

1. 次の漸化式の一般項を示しなさい。

等差数列

$a_{n+1} = a_n + 2$　但し $a_1 = 2$

一般項は

$a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$　但し $n = 1, 2, \cdots$

等比数列

$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$　但し $b_1 = 2$

一般項は

$b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ 但し $n = 1, 2, \cdots$

2. 次の漸化式の一般項を示しなさい。

$c_{n+1} = 3c_n + 7$　但し $c_1 = 2$

解法

こちらは、横についた点数も含めて等比数列の形になることを期待します。

このように変形できるものとします。

$$c_{n+1} - \alpha = 3(c_n - \alpha)$$

これを変形すると、

$$c_{n+1} = 3c_n - 2\alpha$$

つまり、

$$\alpha = -\frac{7}{2}$$

となる。以上より、

$$c_{n+1} + \frac{7}{2} = 3(c_n + \frac{7}{2})$$

となる。これを等比数列とみなして、

$$c_n + \frac{7}{2} = 3^{n-1}\left(c_1 + \frac{7}{2}\right) = 3^{n-1}\left(2 + \frac{7}{2}\right) = \frac{11}{2} \cdot 3^{n-1}$$

$$c_n = \frac{11}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{7}{2} \qquad \text{但し}\ n = 1, 2, \cdots$$

4. 次の漸化式の一般項を示しなさい。

(1)

$$d_{n+1} = 3d_n + 4n - 2 \quad \text{但し}\ d_1 = 2$$

解法

このパターンは次の形の等比数列になることを期待します。

$$d_{n+1} + f(n+1) = 3\big(d_n + f(n)\big)$$

このとき、$f(n)$は n を含む一次式であろうと検討が付きます。そこで、$f(n) = \alpha n + \beta$とおいて、αとβをもとめてみます。

$$d_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3(d_n + \alpha n + \beta)$$

式を整理すると、

$$d_{n+1} = 3d_n + 2\alpha n - \alpha + 3\beta$$

元の式と比べると、$\alpha = 2, \beta = 0$となる。

したがって、

$$d_{n+1} + 2(n+1) = 3(d_n + 2n)$$

$d_n + 2n = k_n$とすれば$k_{n+1} = 3k_n$の等比数列となることがわかる。

したがって、

$$k_n = 3^{n-1}k_1$$

となり、

$$d_n + 2n = 3^{n-1}(d_1 + 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$$

$\therefore d_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2n$　但し $n = 1, 2, \cdots$

(2)

$f_{n+1} = 2f_n + 3n^2 - 5n - 4$　但し $f_1 = 1$

解法

このパターンも次の形の等比数列になることを期待します。

$$f_{n+1} + g(n+1) = 2\big(f_n + g(n)\big)$$

ここで、$g(n)$は二次式になることを期待して、次のように置きます。

$$g(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$$

これを置いて、与式と比較してα、β、γを決めます。

$$f_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 2(f_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

$$f_{n+1} = 2f_n + \alpha n^2 - (2\alpha - \beta)n - \alpha - \beta + \gamma$$

$\alpha = 3,\ 2\alpha - \beta = 5$ より$\beta = 1,\ -\alpha - \beta + \gamma = -4$ より$\gamma = 0$

となる。つまり、

$$f_{n+1} + 3(n+1)^2 + (n+1) = 2(f_n + 3n^2 + n)$$

$$f_n + 3n^2 + n = 2^{n-1}(f_1 + 3 + 1) = 5 \cdot 2^{n-1}$$

$\therefore f_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3n^2 - n$　　但し $n = 1, 2, \cdots$