

電磁気学演習 7章 アンペールの式・円電流の作る磁場

1. アンペールの式

ある円環 C があるとき、C と鎖交する全電流について次の式が成り立つ。

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \times (\text{円環 C と鎖交する全電流}) \quad \text{ただし、場の透磁率 } \mu_0 \text{ が一定}$$

積分範囲の C とは、ループ（環になっている）になっている経路が C ということである。線積分とは、あるベクトルを経路の接線方向と平行な成分を経路に沿って足し合わせていくという意味である。もし磁束密度 \mathbf{B} が経路にそって平行で場所によらず一定であれば、積分値は \mathbf{B} の大きさ \times (経路の距離) になる。右項にある鎖交とありますが、これは円環 C を貫いているという意味である。積分経路の透磁率が一定ではなく、位置によって変化する場合は、磁界 \mathbf{H} を活用し、

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\text{円環 C と鎖交する全電流})$$

を使う。→例題参照

2. 無限直線電流の作る磁束密度の計算

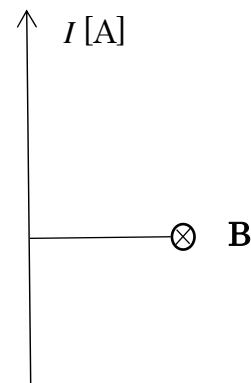
電流 I が下から上へ一直線にながれている。そこから等距離にある半径 r の円環を C とする。図の通り、磁束密度は円をなして巻いている。このときに磁束密度 \mathbf{B} は円環に平行になり、どこも一定の大きさである。したがって、アンペールの式の左項は、経路距離 \times 磁束密度の大きさ、つまり

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r \times B$$

となる。上の $2\pi r$ は円環 C の経路、すなわち円周になります。

$$2\pi r \times B = \mu_0 I$$

がなりたち、 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ がなりたつ。

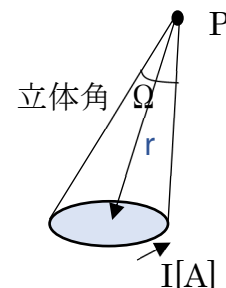


3. 円電流の作る磁場の計算

円電流 I があるときに、それを見込む立体角を $\Omega(P)$ とする。P 点での磁位 Φ は、

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} I \Omega(P)$$

点 P での磁束密度 \mathbf{B} は $\mathbf{B} = -\text{grad } \Phi$ で計算される。



例題1 頻出 無限に伸びる棒状電流 I [A] が半径 r [m] の位置に作る磁束密度を求めなさい。棒の半径は a [m] とする。透磁率は μ_0 とする。

$r > a$ の場合

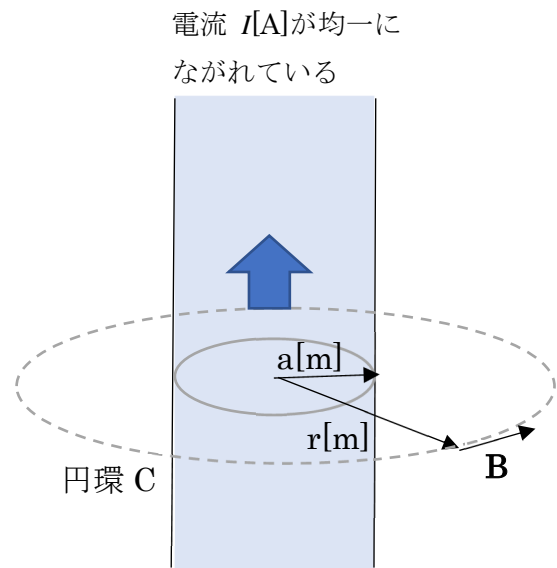
アンペールの式の左項は次の通り。

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r \times B$$

右項は鎖交する電流になるので、

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r \times B = \mu_0 I$$

となり、 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ と求められる。



$r < a$ の場合

アンペールの式の左項に変化はなく、右項が変わる。

円環 C を流れる鎖交する電流は $I \times \frac{\text{半径 } r \text{ の面積}}{\text{半径 } a \text{ の面積}} = I \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = I \frac{r^2}{a^2}$ となる。

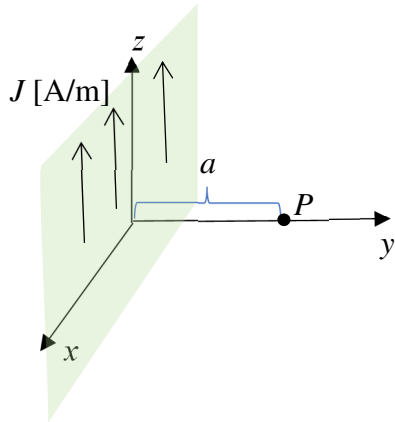
$$2\pi r \times B = I \frac{r^2}{a^2}$$

したがって

$$B = I \frac{r}{2\pi a^2}$$

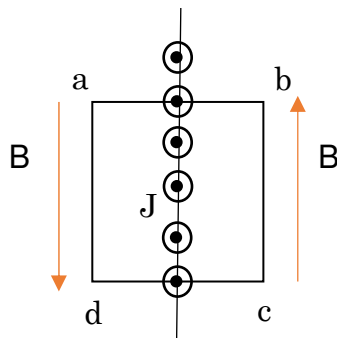
となる。

例題 2 面状電流 図のように xz 平面に z 軸に沿って電流が流れている。単位長さの幅当たり、 J [A/m] 流れるとする。 xz 平面から距離 a [m] の位置にできる磁束密度の大きさを求めなさい。透磁率は μ_0 とする。



解答

xz 平面を上からみた図を示す。図のように $abcd$ の□のループを考える



磁束密度のベクトルは図のような方向になり、 xz 平面に対して対称と考えられる。

この□のループのアンペールの式をたてる。

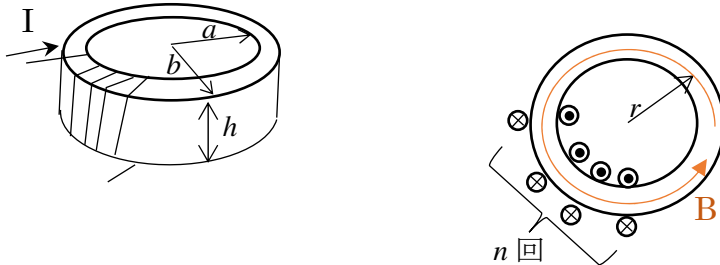
ad 間と cb 間の長さを 1 と仮定すると、

$$\int_{abcd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{bc} B dl + \int_{da} B dl = 2B = \mu_0 J$$

となる。なお、 ab 間と cd 間は磁束密度 B と線積分の経路が直交するため、0 となる。

したがって、磁束密度 B の大きさは $\frac{\mu_0 J}{2}$ となる。

例題3 頻出 トロイダルコイル インダクタンス 図のように n 回巻きのトロイダルコイルの内部の磁束密度を求めなさい。またトロイダルコイルの断面を通過する磁束 Φ と、インダクタンス L を求めよ。電流は $I[A]$ とする。トロイダルコイルの内部の透磁率は μ とする。トロイダルコイルの内部の透磁率は周囲に対して十分高いとする。トロイダルコイルの内円の半径を a 、外円の半径を b とする。



これはトロイダルコイルの中心からの距離を r とする。トロイダル内の透磁率が十分に大きい場合、磁束線はトロイダル内を輪となって閉じ込められる。アンペールの式より、

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r \times B = \mu nI \quad B = \frac{\mu nI}{2\pi r}$$

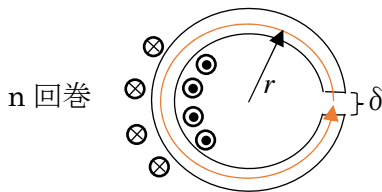
となる。断面の磁束 ϕ は断面で面積積分をした量になる。

$$\Phi = h \int_a^b B(r) dr = \frac{\mu nI}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

インダクタンス L は $LI = n\Phi$ より、 $L = \frac{\mu n^2}{2\pi} \log \frac{b}{a}$ と求められる。

例題4 頻出 Cギャップトロイダルコイル (磁気ヘッド)

図のような空気ギャップのトロイダルコイルがある。コイルは n 回巻きとし、電流は $I[A]$ とする。トロイダルは正円のリングで、内部の磁性体の透磁率 μ であり、ギャップ間の透磁率は μ_0 とし、 $\mu \gg \mu_0$ とする。ギャップ長は $\delta (\cong 0)$ とし、トロイダルコイルの経路長に対して十分短いとする。ギャップ間の磁束密度 B_G を求めよ。



トロイダルの中心から半径 r の円環をアンペールの積分経路とする。この経路内部での磁束密度は等しいが、透磁率がギャップ間と磁性体で、違うので、アンペールの式は \mathbf{H} を使って解く。

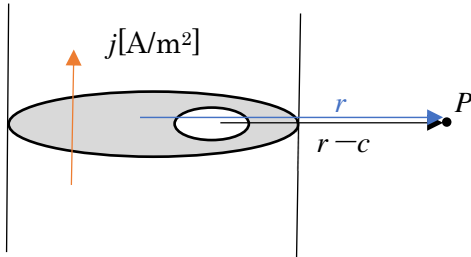
磁性体の磁界を H_m , ギャップ間は H_G とする。

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong 2\pi r H_m + \delta H_G = nI \quad (\text{磁界のアンペールの式})$$

となる。なお、磁性体の経路長は $2\pi r$ とした。 $\mu H_m = \mu_0 H_G$ より、

$$H_G = \frac{nI}{\frac{2\pi r \mu_0}{\mu} + \delta} \quad \text{したがって、} B_G = \mu_0 H_G = \frac{n \mu_0 \mu I}{2\pi r \mu_0 + \delta \mu} \quad \text{となる。}$$

例題 5 磁場の重ね合わせの問題 次の円筒電流がある。円筒の半径は a とし、円筒の中に半径 b の孔が開いている。電流密度は $j[\text{A/m}^2]$ とする。円筒の中心から距離 r 、かつ孔の中心から距離 $r-c$ の位置 (点 P) の磁束密度を求めよ。



一見すると難しそうだが、孔の部分には $-j[\text{A/m}^2]$ の電流が流れていると考え、孔のない円筒の $j[\text{A/m}^2]$ の電流と孔の部分 $-j[\text{A/m}^2]$ の電流が重ね合わされていると考える。

穴がないとして円筒電流が P 点に作る磁束密度は

$$B = \mu_0 \frac{\pi a^2 j}{2\pi r} = \frac{\mu_0 a^2 j}{2r} \text{ となる。}$$

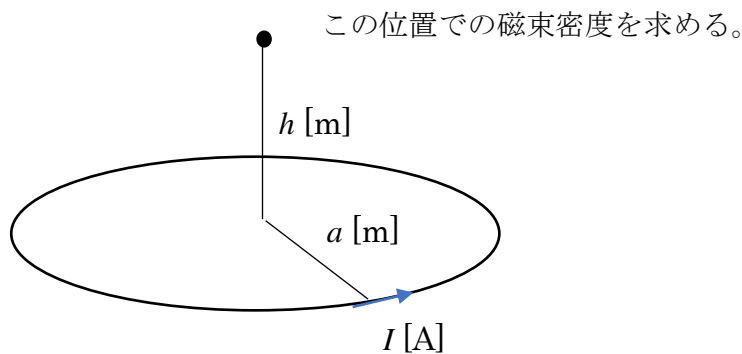
一方の孔の $-j[\text{A/m}^2]$ の電流の作る磁束密度は、

$$B_{hole} = -\frac{\mu_0 b^2 j}{2(r-c)}$$

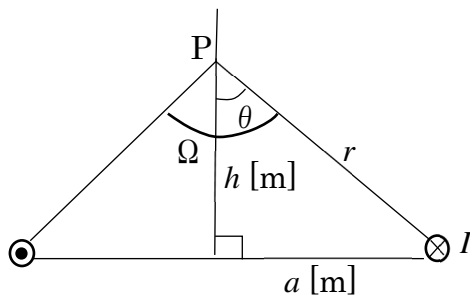
となる。両者の磁束密度の重ね合わせが求める磁束密度となる。

$$\frac{\mu_0 a^2 j}{2r} - \frac{\mu_0 b^2 j}{2(r-c)} = \frac{\mu_0 j}{2} \left(\frac{a^2}{r} - \frac{b^2}{r-c} \right) \text{ 答え}$$

例題 6 円電流の作る磁場の計算 図のように半径 a [m] の I [A] の円環電流が高さ h [m] の位置に作る磁束密度を求めよ。(磁位から導出)



下図のように断面を考える。



点 P から円環を見る立体角 Ω は、

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) \quad (\text{公式})$$

となる。したがって磁位 Φ

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega(P) = \frac{\mu_0 I}{2} (1 - \cos\theta)$$

となる。

より、

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right)$$

となる。磁束密度は高さ h 方向の勾配のマイナスをもとめればよいので、

$$B = -\frac{\partial \Phi}{\partial h} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}}$$

と求められる。

例題 7 [演算子の練習] (x, y, z) の位置でのベクトル \mathbf{E} が次のように定義されている。

$$\mathbf{E} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

このとき、 $\operatorname{div}\mathbf{E}$ と $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ を計算しなさい。

div は発散の演算子である。

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

になります。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2+y^2-x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2+y^2-y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$$

より、 $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ となる。

rot は回転の演算子である。

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \text{である。}$$

どの偏微分で z が絡むものはすべてゼロである。

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

より、 $\operatorname{rot}\mathbf{E} = (0, 0, 0)$ である。