

電磁気学演習 5章 電流の作る磁界 ビオサバールの式

1. **磁界と磁束密度** 磁石がN極とS極で互いにひきつけあうのは、磁石から磁力線（磁束線ともいう）が発せられるからである。電線に電流を流すと、電線周りに磁力線ができて、近くに方位磁石をおくと、その磁針をかたむける。このように磁石や電流の周りに発生する磁力線の大きさを、**磁界**あるいは**磁束密度**という。磁束密度は、単位面積（ 1m^2 ）当たりを貫く磁力線の数で、単位はテスラ（T）で、記号では**B**と書く。磁束密度は、大きさと同時に方向をもっていて、**B**のようにして、ベクトルで表す。磁界は、ややこしいところだが、この言葉で磁束密度を表すこともあるが、多くの場合は磁石を作る原動力を意味し、単位はA（アンペア）/mで表す。このとき、記号はHで、これもベクトル**H**で表す。

1. 磁束密度Bと磁界Hの関係

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

μ は透磁率であり、真空中では、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ の数字をとる。また物質中の比透磁率 μ_s とし、物質固有の比例係数をかけて、 $\mu = \mu_s \mu_0$ とする。

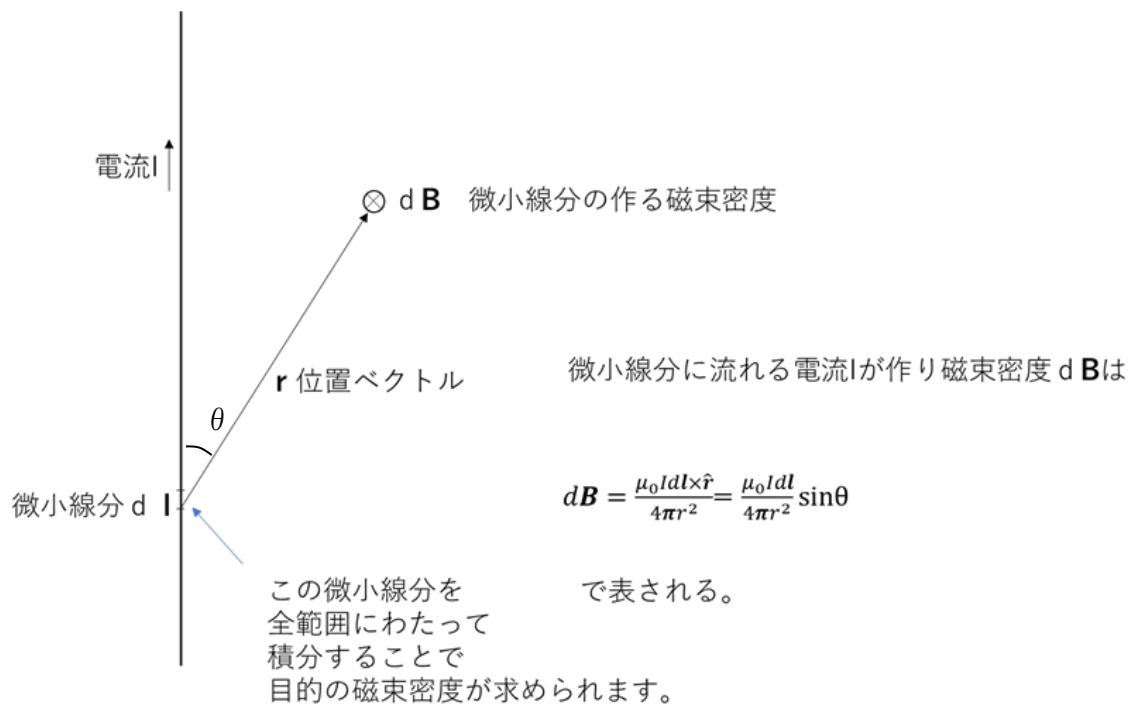
2. 無限直線電流の作る磁束密度

無限に伸びる直線電流から距離 r [m]の位置にできる磁束密度の大きさは

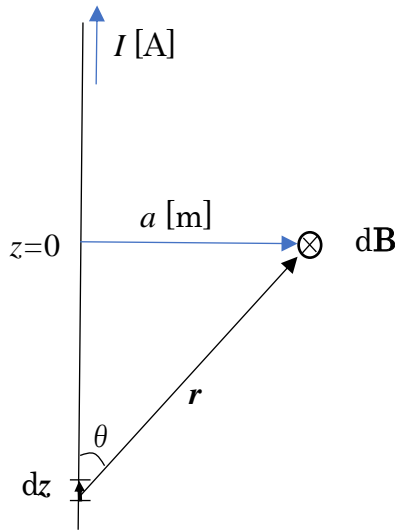
$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

で表される。方向は右ねじの巻く方向である。

3. ビオサバールの式（図解）



例題1 直線電流 無限に伸びる直線電流 I [A] が半径 a [m] の位置に作る磁束密度を求めなさい。透磁率は μ_0 とする。(ビオサバールの式で導出)



z 軸上に電線があるとして、左図のような構成を考える。微小要素 dz の電流が半径 a [m] の位置に作る磁束密度を dB とする。ビオサバールの式を用いると次のようになる。

$$dB = \mu_0 \frac{Idz \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

$$dB = \mu_0 \frac{I \sin\theta dz}{4\pi r^2}$$

となる。全区間を積分すると

$$B = \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \sin\theta dz}{4\pi r^2}$$

となる。ここで r は $r = \sqrt{z^2 + a^2}$ 、 $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}$ であるので、

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ia}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} dz = \frac{Ia}{4\pi} \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} dz$$

となる。ここで、変数変換 $z = a \tan\theta$ とすると、 $\frac{dz}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta}$ から $dz = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$ となる。

$\tan^2\theta + 1 = 1/\cos^2\theta$ より

$$\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{(a^2 \tan^2\theta + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^3} \cos^3\theta$$

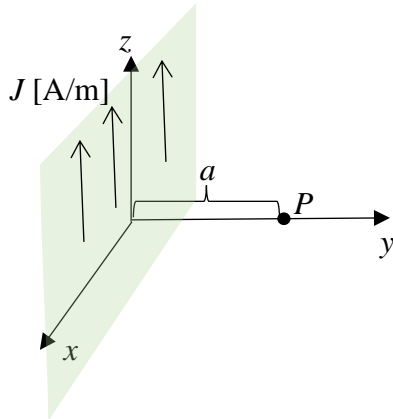
となり、

$$B = \frac{Ia}{4\pi} \mu_0 \int_0^\pi \frac{1}{a^3} \cos^3\theta \cdot \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{I}{4\pi a} \mu_0 \int_0^\pi \cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

となる。

この結果は、無限直線電流の作る磁場の大きさの式として覚えておく。

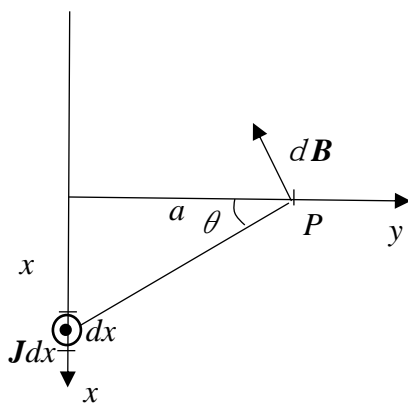
例題2 面状電流 図のように xz 平面に z 軸に沿って電流が流れている。単位長さの幅当たり、 J [A] 流れるとする。 xz 平面から距離 a [m] の位置にできる磁束密度の大きさを求めなさい。



xy 平面を上からみた図を示す。 x の位置の微小区間の電流が P 点に作る磁束密度は

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi r} J dx = \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}} J dx$$

で表される。



xz 平面全体にわたる微小区間に作る電流による磁束密度を積分すると、最終的には磁束密度は $-x$ 方向しか残らない。 P 点の磁束密度の $-x$ 方向成分を B_{-x} とすると、

$$\begin{aligned} dB_{-x} &= \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}} \cos\theta J dx \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}} \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} J dx \\ &= \frac{\mu_0 a}{2\pi(x^2+a^2)} J dx \end{aligned}$$

$$B_{-x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 a}{2\pi(x^2+a^2)} J dx$$

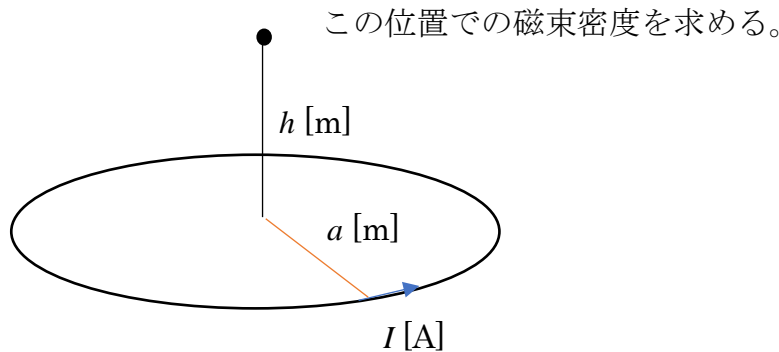
$$x = a \tan\theta \text{ とおくと、} \frac{dx}{d\theta} = a \frac{1}{\cos^2\theta} \text{ より}$$

$$B_{-x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{2\pi a (\tan^2\theta + 1)} J dx = J \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0}{2\pi} d\theta$$

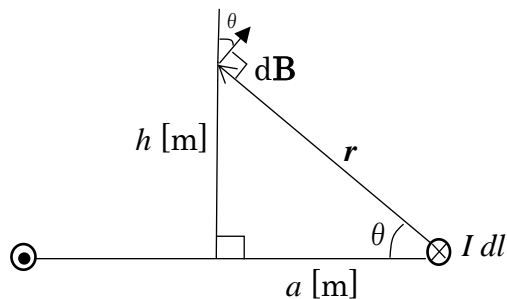
$$= J \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\mu_0}{2} J$$

※非常にわかりやすい式がでてきたが、この後学習するアンペールの式を使うとたちどころに計算できる。

例題3 円電流の作る磁場の計算 図のように半径 a [m] の I [A] の円環電流が高さ h [m] の位置に作る磁束密度を求めよ。(ビオサバールの式で導出)



下の図のように断面を考える。



図のように微小電流 $I dl$ が作る磁束密度 $d\mathbf{B}$ は位置ベクトル \mathbf{r} に対して、直角の方向に向いている。なお位置ベクトル \mathbf{r} と電流の方向は直交しているため

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$$

となる。

円環全部を積分して足し合わせると、 $d\mathbf{B}$ の鉛直上方向の成分しか残らない。鉛直成分を B_{\perp} とすると、

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int dl \times \cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot 2\pi a \cdot \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}$$

と求められる。

仮に高さ h がゼロの場合、

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

となる。

※ミニ解説 以上示してきたように、ビオサバールの式はどんな形状の電流線でも任意の場所の磁束密度を計算できるが、積分の計算を伴う。電磁気学の授業では一本直線と円環しか扱わないのは、これ以外の形になると数式の計算の範囲を超えてしまうからである。入門者はまず直線電流と円環の例をよく覚えておくことだ。なお、コンピュータによる電磁界解析では、ビオサバールの式、その発展形であるベクトルポテンシャルの独壇場になる。