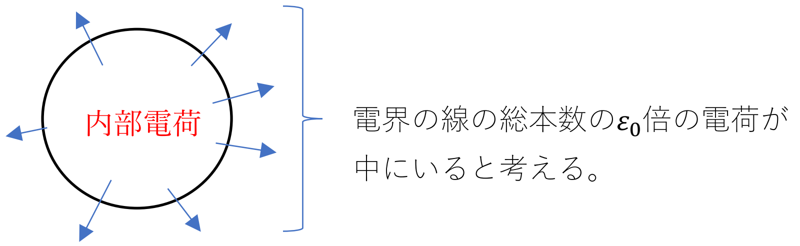
電磁気学演習　3章　ガウスの式を用いた静電界計算

ポイント

1. ガウスの式を使った電界の計算

　電荷が発する電界の計算法として、電界の分布する形状を細かく点として分割し、分割した点を点電荷として、求めたい場所における点電荷の作る電界を求め、全分割点の作る電界ベクトルの総和を求める方法がある。この方法は万能であるが、机上計算には向かない。一方、電荷の分布が、球体、筒状、平面状であれば、電界放射の対称性から、ガウスの式を使って簡単にその強度を求めることができる。

ガウスの式の基本的な考えは、場の誘電率をε_0とすると、1C の電荷から $1/\varepsilon_0$本の電界の線が出ていると考える。 1 m^2を通過する電界の線の本数を電界強度とする。閉曲面から出る電界の線の数を全部数えて、それにε_0との積が中身の電荷にとなる。



この概念を数式でかくと次のようになる。

$$\iint_{閉曲面} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{中身の電荷}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

ここで、$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$の$\boldsymbol{n}$は閉曲面の法線であり、左項全体は閉曲面から出る電界の線の総本数になる。また、閉曲面と電界が直交していて、かつ閉曲面のどこでも電界強度が同じであれば、閉曲面の表面積を使って、

$$閉曲面の表面積 \times E = \frac{中身の電荷}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

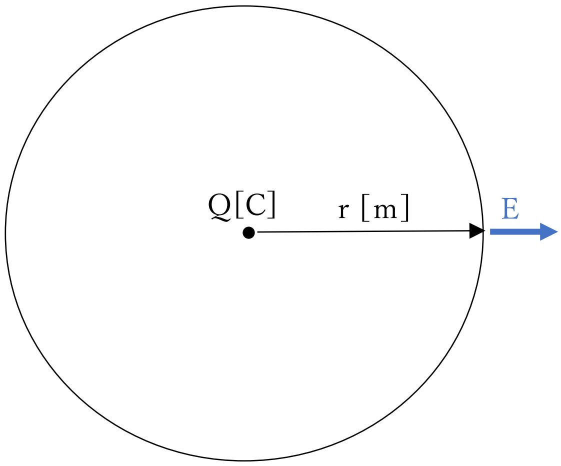
という簡単な式に帰着できる。

　(1) 式は積分の用いた式であるが、微分形では

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

と表される。

例題１　[点電荷問題]　点電荷 Q[C]を真空中に置いたときに、点電荷からの距離 r [m]の位置の電界の強さ E をガウスの式を使って求めよ。真空の誘電率は ε_0 とする。



このような点電荷や球状電荷の場合は、閉曲面として点電荷を中心とした半径 r の球面を考える。ガウスの式の左項は、電界の閉曲面の面積分であり、電界 **E** と閉曲面は直交しており、しかも閉曲面のどこでも電界の強さは同じであることから、閉曲面の面積×電界の強さ E で表される。つまり、左項は $4\pi r^2 E$ となる。E はベクトルではなく、電界の強さである。

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

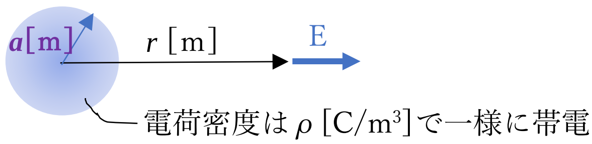
となり、

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

と求められる。

※ミニ解説　点電荷の作る電界の式のなかに $4\pi r^2$ がでてきていたが、これは球の表面積からきていることが分かる。このように物理法則の式で、点から四方八方に均一に、これを等方的というが、等方的に影響を及ぼす現象については $4\pi r^2$ が含まれることが多い。電磁気学では点電荷の電位の式やビオサバールの式などが例である。

例題２　[球状電荷]　半径 a[m]の球体内部に一様に電荷が分布していて、その電荷密度は ρ [C/m^3]である。球体の中心からの距離 r [m]の位置の電界の強さ E をガウスの式を使って求めよ。この空間の誘電率は ε_0 とする。



球状電荷の場合は、閉曲面として球の中心から半径 r の球面を考える。
ガウスの式の左項は演習 1 の答えと同様に $4\pi r^2E$ となる。
ガウスの式の右項は半径 a より遠い場合と近い場合で場合分けをする。

r>a の場合

$$4\pi r^2 E = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho}{\varepsilon_0}$$

ここで$\frac{4}{3}\pi a^3$は半径 a の球の体積であり、電荷密度 ρ をかけることで、半径 a の球の全電荷になる。

r ≦a の場合

$$4\pi r^2 E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{\varepsilon_0}$$

ここでは、ガウスの閉曲面内全体が帯電していることになるので、ガウスの閉曲面の体積$\frac{4}{3}\pi r^3$をかけている。

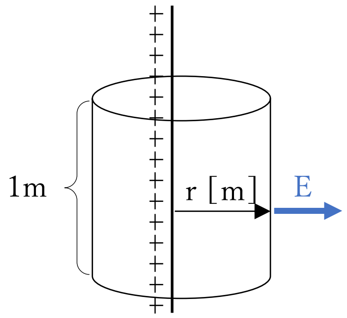
答えは、
r> a の場合

$$E = \frac{a^3 \cdot \rho}{3\varepsilon_0 r^2}$$

r≦a の場合

$$E = \frac{\cdot \rho r}{3\varepsilon_0}$$

例題３　[線状電荷]　無限に延びる直線状に、１ｍ当たりλ[C]で電荷が帯電しているときに、線からの距離 r[m]の位置の電界の強さ E をガウスの式を使って求めよ。この空間の誘電率は ε_0 とする。



この場合は、閉曲面として半径 r [m]で、高さ１ｍの円筒を考える。
ガウスの式をおもいだそう

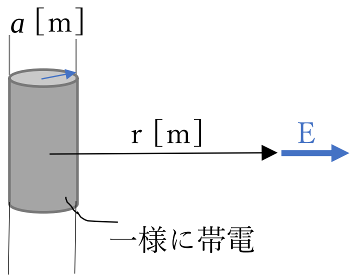
$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\text{閉曲面で囲んだ中身の電気量}}{\varepsilon_0}$$ である。

ここで左項は円筒の側面積が $2\pi r$ であることから $2\pi rE$ となる。
ガウスの式は次のように書き換えられる。

$$2\pi rE = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

以上より　$E = \dfrac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$　となる。

例題 4　[棒状電荷]　無限に延びる半径 a[m]の円筒状に、1 m当たり λ [C]で電荷が帯電している。電荷は円筒において均一に帯電しているとする。円筒の中心線からの距離 r[m]の位置の電界の強さ E をガウスの式を使って求めよ。この円筒も含めて全空間の誘電率は ε_0 とする。



場合分けをする。

$r>a$ の場合

$$2\pi r E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

$r \leqq a$ の場合

$$2\pi r E = \frac{\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\lambda}{\varepsilon_0}$$

$\frac{\pi r^2}{\pi a^2}$であるが、この場合はガウスの閉曲面内部が帯電しており、その量は 1 m当たり λ の半径 a の面積分の半径 r の面積になるからである。

答えは、

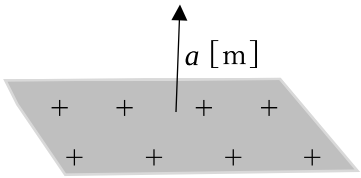
$r>a$ の場合

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

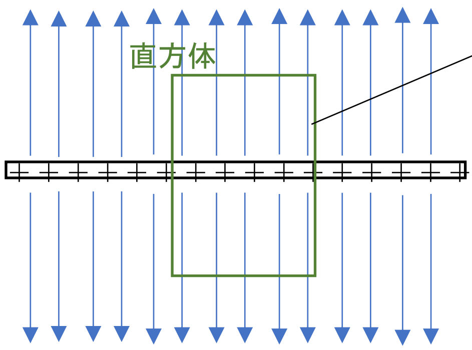
$r \leqq a$ の場合

$$E = \frac{r\lambda}{2\pi a^2 \varepsilon_0}$$

例題 5 ［面状電荷］ 無限に広がるシートにおいて、1 m当たり σ [C]で電荷が一様に帯電している。シートから距離 a[m]の位置の電界 E の強さを求めよ。この空間の誘電率は ε_0 とする。



これは図のように、面を挟んで図のよぅな直方体の閉曲面を考える。



板状電荷を挟んで直方体の閉曲面を考える。上面と底面の面積は 1m^2 とする。上面と底面の電荷面からの距離は a[m]とする。

これでガウスの式をたてる。

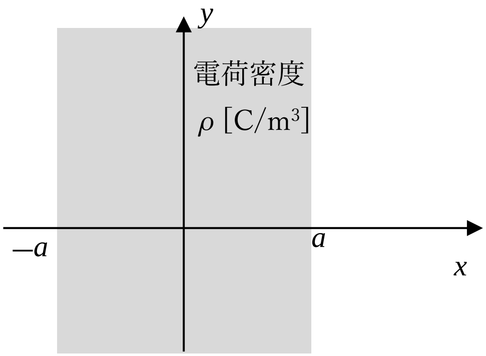
$$\iint_{閉曲面} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \left(上面の面積+底面の面積\right) \mathrm{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

上面および底面の面積は 1m^2 なので、

$$\mathrm{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

となる。この時点で距離 a [m]は関係なくなる。

演習６ ［板状電荷］次の面状に分布する電荷の中の電界強度をもとめてみる。*xyz* 座標において、$-a<x<a$ の範囲で、電荷密度 ρ [C/m^3]で分布しているとする。全空間の誘電率は ε_0 とする。



このような、板状に電荷が分布しているゾーンが板状である場合は、ガウスの式の微分形を使うと便利である。
$-a<x<a$の範囲を考える。ガウスの微分形は

$$div\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

で表され、板状の場合、電界の方向は x 方向に平行になるため、y 方向および z 方向の変化はないため、上の式は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

１回積分をすると、x 方向の電界成分 E_x は

$E_x=\frac{\rho}{\varepsilon_0}x+C$ となる。 C は積分定数

この系は yz 平面に対して対称であり、x=0 で電界強度はゼロになるため、積分定数 C もゼロでる。電界ベクトルの x 成分は

$$E_x=\frac{\rho}{\varepsilon_0}x$$

となる。

$x>a$ の範囲では、電荷密度はゼロのため、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

を解けばよい。この領域では Ex は定数になるが、‐$-a<x<a$の範囲のとの連続性から、

$$E_x=\frac{\rho}{\varepsilon_0}a$$

となる。$x<-a$の範囲では $E_x=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}a$ となる。