1 階常微分方程式　変数分離・同次形・完全形

複数の変数の関係が微分を含む方程式で表されるときに、これを微分方程式という。そのうち、偏微分を含むものを偏微分法手式、常微分だけ表されるものを常微微分方程式という。ここで変数を x、その関数を $y(x)$ として、その 1 階導関数を y' とする。ときに応じてこのように表現する。

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

そして、一階導関数のみの微分方程式を 1 階常微分方程式という。

1 階微分方程式として最も簡単なのは

$$y' = f(x)$$

の形である。これは両辺の積分を解くだけで一般解が求められる。

例題 1　$y' = 2x^3 + x - 1$　ただし $x = 0$ のとき $y = 0$ とする。

この一般解は、単純に両辺の不定積分をとればよい。不定積分をとると

$$y = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - x + C$$

ここで、初期値を代入すると、積分定数 C は 0

$$y = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - x$$

（おわり）

これから様々な 1 階微分方程式の解き方として、変数分離形、同次形、完全形微分方程式の解き方を習得していく。

1.　完全分離系

$$y' = F(x)G(x)$$

この形で表されるときには、次のように変形して一般解を得る。

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x)dx$$

このように、左辺右辺を y だけ、x だけで整理する。あとは、両辺をそれぞれの変数

で積分すればよい。

$$\int \frac{1}{G(y)}dy = \int F(x)dx$$

例題２　次の微分方程式を求めなさい。ただし$x = 0$ のとき、$y = 0$とする。

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y$$

$$\frac{dy}{1 - y} = dx$$

両辺をそれぞれ積分する。

$$-\log(1 - y) = x + C$$

C は積分定数である。

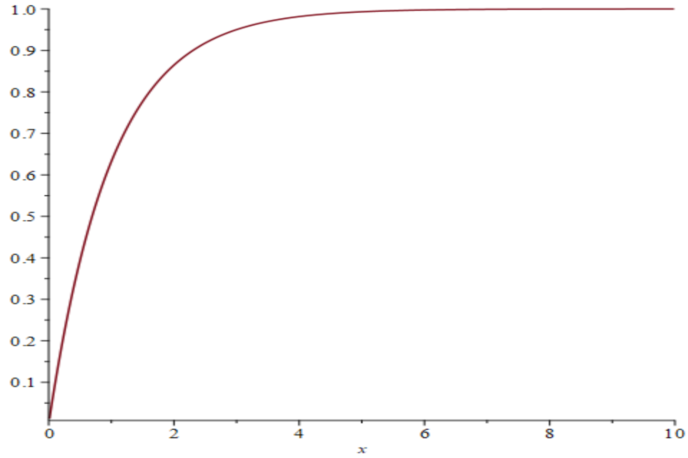
$$1 - y = e^{-x-C}$$

$$y = 1 - C_1 e^{-x}$$

初期値を代入するとC_1＝0 となる。

$$y = 1 - e^{-x}$$

これは次のような関係になる。



例題３　$y' = (1+x)\tan y$ の一般解を求めなさい。ただし$x = 0$ のとき、$y = \pi/2$とする。

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)\tan y$$

$$\frac{1}{\tan y}dy = (1+x)dx$$

両辺を積分する。

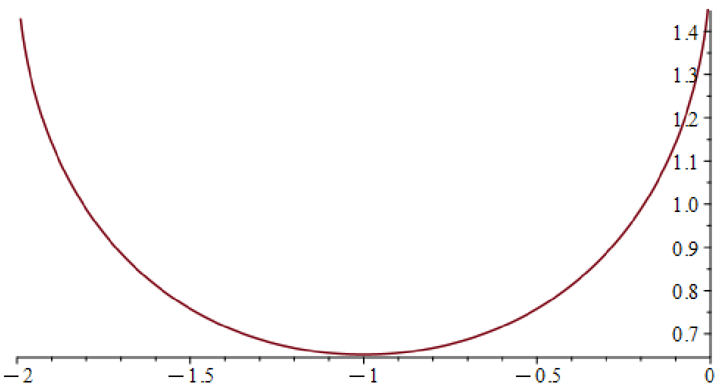
$$\frac{\cos y}{\sin y}dy = (1+x)dx$$

$$\log|\sin y| = x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

初期値を満たすCはゼロである。

$$\log|\sin y| = x + \frac{1}{2}x^2$$

$$y = \arcsin\left(e^{x+\frac{1}{2}x^2}\right)$$



2.　同次形

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形、すなわち、y'が$\frac{y}{x}$の関数であるときに、完全分離系に変形ができる。

$$u = \frac{y}{x}$$

とします。すると

$$y' = (ux)' = u'x + u = F(u)$$

したがって、

$$\frac{u'}{F(u) - u} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{F(u) - u} = \frac{1}{x}dx$$

あとは、これを解いていけばよい。この時点で完全分離系になることがわかる。

例題 4

$$(2y^3 + xy^2)y' = y^3$$

を解いて、一般解を求めよ。

$y' = \frac{y^3}{2y^3+xy^2} = \frac{1}{2+x/y}$　但し$y \neq 0$

ここで

$$u = \frac{y}{x}$$

とおく。

$y' = \frac{1}{2+u^{-1}} = \frac{u}{2u+1}$

また$y = ux$から、$y' = xu' + u$より

$xu' + u = \frac{u}{2u+1}$

$$xu' = \frac{u}{2u+1} - u = -\frac{2u^2}{2u+1}$$

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{2u^2}{2u+1}$$

$$\left(\frac{2u+1}{2u^2}\right)du = -\frac{1}{x}dx$$

両辺積分すると

左辺は

$$\int\left(\frac{2u+1}{2u^2}\right)du = \int\left(1+\frac{1}{2}u^{-2}\right)\, du = u - \frac{1}{2}u^{-1} + C$$

右辺は

$$\int -\frac{1}{x}dx = -\log|x| + C_2$$

一般解は

$$u - \frac{1}{2}u^{-1} = \frac{y}{x} - \frac{x}{2y} = -\log|x| + C_3$$ （おわり）

例題 4　　次の微分方程式を求めなさい。

$$y' = \frac{2x-y}{x+y}$$

解説

同次形であるので、*y*=*ux* とおく。

$$y' = xu' + u$$

与方程式は

$$y' = xu' + u = \frac{2-u}{1+u}$$

$$xu' = \frac{2-u}{1+u} - u = \frac{2-2u-u^2}{1+u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{2-2u-u^2}{1+u}$$

$$\left(\frac{1+u}{2-2u-u^2}\right)du=\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2u+2}{u^2+2u-2}\right)du=\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\log|u^2+2u-2|=\log|x|+C$$

$$\log|u^2+2u-2|=\log|x|^{-2}+C$$

$$|u^2+2u-2|=\frac{C_1}{x^2}$$

$$\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}-2\right|=\frac{C_1}{x^2}$$

$$|y^2+2yx-2x^2|=C_1$$

（おわり）

例題 5　次の微分方程式をときなさい。

$$y'=\frac{2x-y+1}{x+y+1}$$

解説

この形は変数を次のように置き返して同次形を作りに行く。

$$x=X+a$$
$$y=Y+b$$

これを右辺に代入して、同次形の形にしていく。

$$\frac{2(X+a)-(Y+b)+1}{(X+a)+(Y+b)+1}=\frac{2X-Y+2a-b+1}{X+Y+a+b+1}$$

ここで次の連立方程式を解く。

$$2a-b+1=0$$
$$a+b+1=0$$

よって

$$a=-\frac{2}{3}\quad b=-\frac{1}{3}$$

以上より、与方程式は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X+Y}$$

$$Y=uX$$

とおくと、

$$Y'=u'X+u$$

$$u'X+u=\frac{2-u}{1+u}$$

$$Xu'=\frac{2-u}{1+u}-u=\frac{2-2u-u^2}{1+u}$$

$$X\frac{du}{dX}=\frac{2-2u-u^2}{1+u}$$

$$\left(\frac{1+u}{2-2u-u^2}\right)du=\frac{1}{X}dX$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2u+2}{u^2+2u-2}\right)du=\frac{1}{X}dX$$

$$-\frac{1}{2}\log|u^2+2u-2|=\log|X|+C$$

$$\log|u^2+2u-2|=\log|X|^{-2}+C$$

$$|u^2+2u-2|=\frac{C_1}{X^2}$$

$$\left|\frac{Y^2}{X^2}+\frac{2Y}{X}-2\right|=\frac{C_1}{X^2}$$

$$|Y^2+2YX-2X^2|=C_1$$

ここで変数を元に戻すと、

$$\left|\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)-2\left(x+\frac{2}{3}\right)^2\right|=C_1$$

3. 一階線形微分方程式

y‘と y が含まれる微分方程式で

$$y' + u(x)y = s(x)$$

の形で表される微分方程式を 1 階微分方程式という。この一般解は次のようにして求める。

$y' + u(x)y = 0$とおいて、y を変数分離して求める。

$$\frac{dy}{dx} = -u(x)y$$

$$\frac{1}{y}dy = -u(x)dx$$

$$\log|y| = -\int u(x)dx$$

ここで$\int u(x)dx = U(x)$と表記する。

$$\log|y| = -U(x) + C$$

$$y = C_1 e^{-U(x)}$$

さらに、ここで与方程式の解は

$$y = C(x)e^{-U(x)}$$

と仮定する。$y' + u(x)y = s(x)$に代入すると

$$C'(x)e^{-U(x)} - C(x)u(x)e^{-U(x)} + u(x)y = s(x)$$

第二項と第三項は打ち消されて、

$$C'(x)e^{-U(x)} = s(x)$$

を満たすような$C(x)$が決定できれば、

$$y = C(x)e^{-U(x)}$$

を一般解とすることができる。

例題 6　　$y' + xy = x$の一般解をもとめなさい。

$y' + xy = 0$と置いて解を求める。

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\frac{1}{y}dy = -xdx$$

$$\log|y| = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$y = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ここで、改めて与方程式の解を

$$y = C(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

として、それに代入する。

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x$$

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x$$

$$C'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\int C'(x)\,dx = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{x^2}{2}} + C_2$$

したがって、このようになる。

$$y = \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C_2\right)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + C_2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

（おわり）

例題 7　$y' + x^2 y = \cos x$の一般解をもとめなさい。

$y' + x^2 y = 0$と置いて解を求める。

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 y$$

$$\frac{1}{y}dy = -x^2 dx$$

$$\log|y| = -\frac{x^3}{3} + C$$

$$y = C_1 e^{-\frac{x^3}{3}}$$

ここで、改めて与方程式の解を

$$y = C(x)e^{-\frac{x^3}{3}}$$

として、それに代入する。

$$C'(x)e^{-\frac{x^3}{3}} - x^2C(x)e^{-\frac{x^3}{3}} + x^2C(x)e^{-\frac{x^3}{3}} = \cos x$$

$$C'(x) = e^{\frac{x^3}{3}} \cos x$$

$$C(x) = \int e^{\frac{x^3}{3}} \cos x \, dx$$

注　この原始関数を求めるのは困難。

$$y = \left(\int e^{\frac{x^3}{3}} \cos x \, dx\right) e^{-\frac{x^3}{3}}$$

（おわり）

例題８　$y' + y = \tan x$の一般解をもとめなさい

$y' + y = 0$とおいて、この微分方程式の一般解を求める。

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -1$$

$$\log|y| = -x + C$$

$$y = C_1 e^{-x}$$

ここで、与方程式の一般解を

$$y = C(x)e^{-x}$$

として$C(x)$を求める。

$$y' + y = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = \tan(x)$$

$$C'(x) = \tan(x) \, e^x$$

$$C(x) = \int \tan(x) \, e^x$$　注　これは初等関数で表すことはできない

4.　完全形微分方程式

$y' = -\frac{u(x,y)}{s(x,y)}$の形、これを書き換えると、

$$u(x,y)dx + s(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

の形をしていて、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = u(x,y),\ \frac{\partial F}{\partial y} = F_y = s(x,y) \tag{2}$$

が成り立つときに、これを完全形という。そして、F_xは関数 Fの x での偏微分を意味する。偏微分は x 以外の変数はすべて定数として微分するという。そして与方程式の解は

$$F(x,y) = C(\text{定数})$$

完全形である条件は、(2)式を満たす関数$F(x,y)$を呈示できること以外に、

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial s(x,y)}{\partial x}$$

を示せればよい。つまり、**dx の係数は y で偏微したものが、dy の係数を x で偏微分したものに等しい**ということである。関数$F(x,y)$の見つけ方であるが、

$$F(x,y) = \int u(x,y)dx + \int \left(s(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int u(x,y)dx \right) dy$$

となる。上の第一項は **x 以外の変数は定数とみなして積分する**という意味である。また**第二項は$s(x,y)$の y での積分で y のみを含む項**という意味である。

例題 9　$(x^2+y)dx + (y^2+x)dy = 0$の一般解を求めなさい

$$\frac{\partial(x^2+y)}{\partial y} = 1,\ \ \frac{\partial(y^2+x)}{\partial x} = 1$$

であり、完全形である。そこで一般解は

$$\int (x^2+y)\,dx = \frac{x^3}{3} + yx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int (x^2+y)dx\ = x$$

$$\int \{(y^2+x) - (x)\}\,dy = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3}$$

よって

$$F(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy+\frac{y^3}{3}=C$$
が一般解である。

例題 10 次の方程式の一般解を求めなさい。

$$y'=-\frac{y-x^2}{x-\cos y}$$

まず完全形かどうか確かめる。

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{y-x^2}{x-\cos y}$$

$$(y-x^2)\partial x+(x-\cos y\,)\,\partial y=0$$

$$\frac{\partial(y-x^2)}{\partial y}=1,\qquad \frac{\partial(x-\cos y\,)}{\partial x}=1$$

完全形であることがわかった。
この一般解であるが、

$$\int(y-x^2)dx=yx-\frac{x^3}{3}$$

$$\int(x-\cos y\,))dx=\frac{x^2}{2}-\sin y$$

直前の積分で y の実を含む項は、$-\sin y$のみであるので、一般解は

$$yx-\frac{x^3}{3}-\sin y=C$$

となる。

例題 11　変形すれば完全形になるパターン

$$ydx-3xdy=0$$

この場合、この形では完全形ではないが、$xy\neq0$であることを前提に、両辺をxyで割ると完全形になる。

$$\frac{1}{x}dx-\frac{3}{y}dy=0$$

それでは一般解を求める。

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$$

$$\int -\frac{3}{y} dy = -3\log|y|$$

したがって、一般解は

$$\log|x| - 3\log|y| = C$$

となる。