高校数学の復習 8　対称式

まずは問題を与えますので、解いてみましょう。

1. 次の二式から、変数 x と y の値を求めなさい。

(1)

$$x + y = 3$$
$$xy = 6$$

(2)

$$x + y = 4$$
$$x^2 + y^2 = 6$$

2. $x + y + z = -6,\ xy + yz + zx = 11, xyz = -6$ であるときに、変数 x, y, z の値を求めなさい。

3. $x + y + z = 1,\ xy + yz + zx = 2,\ xyz = 3$ であるときに、次の式の値を求めなさい。

(1)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

(2)

$$x^2 + y^2 + z^2$$

(3)

$$x^3 + y^3 + z^3$$

(4) （知らないと難ずかしいが、面白い問題）

$$x^5 + y^5 + z^5$$

4. $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ であるときに、次の式の値を求めなさい。

(1)

$$x - \frac{1}{x}$$

(2)

$$x^3 + \frac{1}{x^3}$$

対称式

2 変数、3 変数などの多項式において、変数を入れ替えても形が変わらない式を対称式といいます。どんな対称式でも、変数の基本的パーツで式を表すことができます。

① x, y の二変数多項式　　例　x^2+y^2や$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$など

これは基本パーツとなる$x+y=\alpha,\ xy=\beta$で表せます。

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\alpha^2-2\beta$$

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}=\frac{\alpha(\alpha^2-2\beta-\beta)}{\beta}=\frac{\alpha(\alpha^2-3\beta)}{\beta}$$

② x, y, z の二変数多項式　　例　$x^2+y^2+z^2$、$x^3+y^3+z^3$など

これは基本パーツとなる$x+y+z=\alpha,\ xy+yz+zx=\beta,\ xyz=\gamma$で表せます。

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2xy-2yz-2zx=\alpha^2-2\beta$$

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$

$$=\ \alpha(\alpha^2-3\beta)+3\gamma$$

※これは因数分解の公式を使ったが、これを使わずとも

$(x+y+z)^3$を展開しても求めることができます。

解答

1. 次の二式から、変数 x と y の値を求めなさい。

(1)

$$x+y=3$$

$$xy=6$$

連立方程式として変数代入を使うのはやめましょう。二次方程式の解と係数の関係を使います。次の t の二次方程式の解が変数 x と y の値となります。

$$t^2-3t+6=0$$

この方程式の t の係数が、$x+y$の値のマイナスの数値になり、定数項がxyの値になります。

$$t^2-3t+6=(t-2)(t-3)=0$$

となり、解は *2,3* と求められます。これが x と y の値となりますが、入れ替えても成り立ちます。

A.　$(x, y) = (2, 3), (3, 2)$

(2)

$$x + y = 4$$
$$x^2 + y^2 = 6$$

これも基本パーツで表してみましょう。

$$x + y = \alpha = 4$$
$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \alpha^2 - 2\beta = 6$$

二式目に α の値を代入すると、$\beta = 5$となる。後は解と係数の関係より

$$t^2 - 4t + 5 = (t - 1)(t - 4) = 0$$

解は 1, 4 と求められます。

答え　$(x, y) = (1, 4), (4, 1)$

2.　$x + y + z = -6,\ xy + yz + zx = 11, xyz = -6$であるときに、変数 x, y, z の値を求めなさい。

これも三次方程式の解と係数の関係を使います。

<重要>

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz$$

今回もこれを使います。

$$t^3 + 6t^2 + 11t + 6 = 0$$

この解が整数としたなら、定数項の素因数の可能性があると考えます。6 の素因数ですが、±1, ± 2, ± 3, ± 6 になりますが、ここでー 1 を入れると式が成り立ちます。

$$t^3 + 6t^2 + 11t + 6 = (t + 1)(t^2 + 5t + 6) = (t + 1)(t + 2)(t + 3) = 0$$

解として、-1, -2, -3 と求められます。

答え　(x, y, z) = (-1, -2, -3), (-2, -1, -3), (-3, -2, -1),
(-1, -3, -2), (-2, -3, -1), (-3, -1, -2)　全 6 通り

3.　$x + y + z = 1,\ xy + yz + zx = 2,\ xyz = 3$であるときに、次の式の値を求めなさい。

(1)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{2}{3}$$

(2)

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 1^2 - 2 \times 2 = -3$$

※2 乗の和が負になるが、x,y,z に複素数が含まれていることを意味している。

(3)

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$
$$=1\times(-3-2)+3\times3=4$$

(4)

$$x^5+y^5+z^5$$

この問題も上記と同様に因数分解をしても解けますが、漸化式を使うと簡単に解けます。

$x+y+z=1,\ xy+yz+zx=2,\ xyz=3$より

t^3-t^2+2t-3=0 を満たします。

つまり、これは x, y, z それぞれに当てはまります。

x^3-x^2+2x-3=0

y^3-y^2+2y-3=0

z^3-z^2+2z-3=0

これを足し合わせると、

$(x^3+y^3+z^3)-(x^2+y^2+z^2)+2(x+y+z)-3$=0

ここれ、$A_n=x^n+y^n+z^n$として、両辺にA_nをかけると、

$A_{n+3}-A_{n+2}+2A_{n+1}-3A_n=0$の漸化式が求められます。

上の問題より、$A_1=1, A_2=-3, A_3=4$と求められています。

$$A_4=A_3-2A_2+3A_1=4+6+3=13$$

よって

$$A_5=A_4-2A_3+3A_2=13-8-9=-4$$

となります。

5. $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$であるときに、次の式の値を求めなさい。

(1)

$$x-\frac{1}{x}$$

これも対称式と考えましょう。$s=x, t=\frac{1}{x}$とすると、$st=1, s+t=\sqrt{5}$となります。

与式$=\pm\sqrt{(s-t)^2}=\pm\sqrt{s^2-2st+t^2}=\pm\sqrt{(s+t)^2-4st}=\pm\sqrt{5-4}=\pm 1$

(2)

$x^3+\frac{1}{x^3}=s^3+t^3=(s+t)(s^2-st+t^2)=(s+t)((s+t)^2-3st))$

$=\sqrt{5}(5-3)=2\sqrt{5}$