高校数学の復習　3　　解と係数の関係

1. $\alpha+\beta=4$、$\alpha\beta=3$のときに、αとβの値を求めなさい。

2. 次の方程式の 3 つの解を α、β、γ とする。次の式の値を求めなさい。

$x^3-6x^2+11x-6=0$

(1) $\alpha+\beta+\gamma$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

(3) $\alpha\beta\gamma$

(4) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(5) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

解説
二次方程式の二つの解をα、βとすると、次の方程式が成り立ち、解と方程式の係数とは次のような関係がある。

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

つまり、

$\alpha+\beta$はxの係数のマイナス、$\alpha\beta$は定数項

となる。
三次方程式では、三つの解をα、β、γとすると、次の関係となる。

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

1. $\alpha+\beta=4$、$\alpha\beta=3$より、αとβは次の方程式の解になる。

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$より、$x=1,3$となる。αとβは入れかえても成り立つので、

$\therefore(\alpha,\beta)=(1,3)$、$(3,1)$

2. 解と係数の関係より、(1)～(3)まですぐに求められる。

$x^3-6x^2+11x-6=0$

(1) $\alpha+\beta+\gamma=6$

(2)$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=11$

(3) $\alpha\beta\gamma=6$

(4) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=6^2-22=14$

(5) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

これは、$(\alpha+\beta+\gamma)^3$を考えてもよいが、元の方程式を考えることにする。

α、β、γはそもそも、方程式の解なので次の 3 式を満たす。

$\alpha^3-6\alpha^2+11\alpha-6=0$

$\beta^3-6\beta^2+11\beta-6=0$

$\gamma^3-6\gamma^2+11\gamma-6=0$

これを足し合わせると、

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+11(\alpha+\beta+\gamma)-18=0$$

となり、

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3&=6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-11(\alpha+\beta+\gamma)+18\\&=6\cdot14-11\cdot6+6=36\end{aligned}$$