高校数学の復習

パターンで覚える因数分解

まずは問題を解いてみましょう。数学脳をきたえるエクササイズです。因数分解は練習するほど上手になっていきます。解説は後ほど。

問題

1. 39951 を素因数分解しなさい。　ヒント　$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$を使う。

2. 次の式を因数分解しなさい。　　ヒント　因数定理を使う。

(1) $a^3 + 27b^3$

(2) $2x^3 + 5x^2 - 3$

(3) $x^3 + 1$

(4) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

(5) $x^3 - 3yx^2 + x - 3y$

(6) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

3. 次の式を因数分解しなさい。　ヒント　低い変数で式を整理します。

$2t^3 + 3st - 36s - 3456$

4. 二次の項がない三次方程式の実数解を因数分解して求めなさい。

ヒント　公式を使って解きます。

$x^3 - 21x + 344 = 0$

5. 次の式を因数分解しなさい。　ヒント　展開形を予測して解く。

$x^4 + 3x^2 + 7x + 5$

覚えておきたい因数分解の公式

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$　　複合同順

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$　　複合同順

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

これも教科書にはでてきませんが有名なもので覚えおきましょう。

解答

1.　39951 は 3 で割れるが、それでやっていくとツボに陥る。

$39951 = 40000 - 49 = 200^2 - 7^2 = (200+7)(200-7)$

$= 207 \cdot 193 = 3 \cdot 69 \cdot 193 = 3^2 \cdot 23 \cdot 193$

類題　2021 を素因数分解しなさい。

これも上記と同じパターンで解きます。

$2021 = 45^2 - 4 = 45^2 - 2^2 = (45+2)(45-2) = 47 \cdot 43$

2.　公式・因数定理などを使って解いていきます。

因数定理　変数 x の関数 $f(x)$ について、$f(a) = 0$ が成り立つときに
この関数は $(x - a)$ の因数を持つ。

つまり、変数に代入してゼロになる数を見つければ、因数分解できます。

(1)　$a^3 + 27b^3 = a^3 + (3b)^3 = (a+3b)(a^2 - 3ab + 9b^2)$

この式は上のように三乗の和の因数分解の式を使えば簡単ですが、
a を変数にみたてて、$-3b$ を代入すればゼロになりますので、$(a+3b)$ を因数に持ちます。
あとは次の通り組み立て除法をすれば、残りに因数がでてきます。

$-3b$	1	0	0	$27b^3$
		$-3b$	$9b^2$	$-27b^3$
	1	$-3b$	$9b^2$	0

よって$(a+3b)$で割り切れ、$a^2-3ba+9b^2$が商になることがわかります。

(2)まずはまともに解いてみましょう。適当に項を組み合わせて求めみます。

$2x^3+5x^2-3=2x^3+2x^2+3x^2-3=2x^2(x+1)+3(x^2-1)$

$=2x^2(x+1)+3(x+1)(x-1)=(x+1)(2x^2+3x-3)$

ここで因数定理で解いてみます。与式の定数項がー３であり、この素因数が代入する値の候補になります。この場合は 1、3、-1、-3 が候補になります。これも変数 x に -1 をいれると与式がゼロになりますので$(x+1)$の因数を持ちます。

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 5 & 0 & -3 \\ & & -2 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & -3 & 0 \end{array}$$

以上より、

$2x^3+5x^2-3=(x+1)(2x^2+3x-3)$

(3) このパターンも公式通りですが、公式を忘れても x にー1 を代入すると 0 になりますので、$(x+1)$の因数もちます。

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

(4) $x^3+6x^2+11x+6$

これも因数定理として代入する数値の候補ですが、6 の負の数を含む素因数、±1、±2、±3、±6 がありますが、-1、-2、-3 のいずれもゼロになります。つまり与式は次のように因数分解できます。

$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$

(5) x^3-3yx^2+x-3y

変数を x として$3y$をいれるとゼロになります。つまり$(x+3y)$を共通因数に持ちます。これも組み立て除法をしてみましょう。

$$\begin{array}{r|rrrr} 3y & 1 & -3y & 1 & -3y \\ & & 3y & 0 & 3y \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$x^3-3yx^2+x-3y=(x-3y)(x^2+1)$

(4) まずまともにやるやり方を示します。

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+z^3-3xyz$

$= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z)$

$= \big((x+y)+z\big)\big((x+y)^2 - z(x+y) + z^2\big) - 3xy(x+y+z)$

$= (x+y+z)(x^2+2xy+y^2-zx-zy+z^2-3xy)$

$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

この結果は公式として覚えておきましょう。

さらにこの式の発展、右の項は平方完成できることも覚えておきましょう。

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)=\frac{1}{2}(x+y+z)\big((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\big)$$

重要　$(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$は x,y,z が実数である限り正である。

以上だいぶ複雑でしたが、これも x を変数にみたて$-(y+z)$を代入するとゼロになります。

$$\big(-(y+z)\big)^3 + y^3 + z^3 - 3\big(-(y+z)\big)yz$$

$$= -(y^3+3y^2z+3yz^2+z^3) + y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2 = 0$$

よって、$(x+y+z)$を因数に持ち、組み立て除法で商を求めて、因数分解することができます。

3.　複数の変数があるときに、次数の少ない変数で整理すると見えてくるものがあります。

$2t^3 + 3st - 36s - 3456$

$= 2t^3 - 3456 + 3s(t-12)$　1 次の変数 s でくくると、$t-12$でくくれます。

残った項も$t-12$で整理できないかと考え、まずは 3456 を 12 で割れるかどうか確かめます。

$3456 = 2\cdot 12^3$　となることから、

与式$=2(t^3-12^3)+3s(t-12)$

$= 2(t-12)(t^2+12t+12^2)+3s(t-12)$

$= (t-12)(2(t^2+12t+12^2)+3s)$

$= (t-12)(2t^2+24t+2\cdot 12^2+3s)$

4.　2 次の項がない三次方程式は

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ をつかってときます、

$x^3-3yzx+y^3+z^3$ と与式を比較して、y,z に当てはまる数を推定します。この場合は y を 1、z を 7 とすればよいことがわかります。

$x^3-21x+344=(x+1+7)(x^2+1^2+7^2-x\cdot 1-1\cdot 7-7\cdot x)$

$= (x+8)(x^2-8x+43)=0$

ここで、解として$x=-8$として求められます。さらに右項ですが、問題 2 の(3)より正であることが

わかりますので、実数解は−8 のみになります。この式では、判別式を使っても容易に判定できますが、多変数の因数分解のときにはこの解釈が威力を発揮するときがあります。

5.　この問題は x にいろいろな数を入れてゼロになるかどうかを確かめます。最後の定数が 5 なので、5 の素因数、例えば 1、5、それに−1、−5 をいれて考えてみますが、どうもうまくいきません。もしかしたら、これは与式＝0 と置いたときに、実数解を持たないパターンかもしれません。

ここは、$(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\gamma x+\delta)$の形にならないかと考えるのも手です。

ここはもう少し楽をして β を 1、δ を 5 として考えてみます。

$x^4+3x^2+7x+5=(x^2+\alpha x+1)(x^2+\gamma x+5)$

$=x^4+(\alpha+\gamma)+x^3+(6+\alpha\gamma)x^2+(5\alpha+\gamma)x+5=0$

このとき係数比較して、α=1，γ=2 と推定できます。

与式= $(x^2+x+1)(x^2+2x+5)$

ここから先、左項も右項も判別式で負になりますので、これ以上因数分解ではきないとして終了になります。