

ユークリッドの互除法

まずは最初に問題を与えますので、考えてみましょう。

1. 次の分数を簡単にしなさい。

$$\frac{481}{507}$$

2. 次の整数方程式を満たす整数 a 、 b を求めなさい。

$$17a + 7b = 128$$

解答

1.

数の大きい整数の共通素因数を見つけるには、ユークリッドの互除法を使います。二つの整数のうち数の大きい方を左辺にして、小さいほうの整数で割り、商と剰余を式で表します。

$$507 = \underline{481} \times 1 + \underline{26}$$

$$481 = 26 \times 18 + \underline{13}$$

共通因数

$$26 = 13 \times 2 + 0$$

商が0、あまりが304。そしたら**割る数を左辺**にして、余りで割り算をし、商と剰余を求めます。

これを、余りがゼロになるまで続けます。

商は割られる数、余りは割る数と覚えます。

最後にできた余りが**共通因数**となる。

最後に余りが1になった場合二つの整数は互いに素になります。

したがって、

$$\frac{481}{507} = \frac{481 \div 13}{507 \div 13} = \frac{37}{39}$$

となります。分子分母とも互いに素ですので、簡単化はここで終了となります。

2.

整数方程式をユークリッドの互除法で解く。

$$17a + 7b = 128 \quad (1)$$

ここで、 a と b の候補となる整数が見つかった場合はユークリッドの互除法は必要ありません。推定できない場合はこれを使います。

とりあえず、左辺を1として、次の式を作ります。

$$17a' + 7b' = 1$$

とします。17と1は互いに素なので、ユークリッドの互除法を適用します。

$$17 = 7 \times 2 + 3$$

$$7 = 3 \times 2 + 1 \quad \text{ユークリッド互除法終了}$$

最後の式から

$$1 = 7 - 3 \times 2$$

これに最後から二番目の式を代入

$$1 = 7 - (17 - 7 \times 2) \times 2$$

これを整理すると

$$1 = 7 \times 5 - 17 \times 2$$

が求められます。これに与式の右辺の 128 をかけます。

$$128 = 128 \times 5 \times 7 - 128 \times 2 \times 17 \quad (2)$$

つまり、与式と比較すると $a = -128 \times 2 = -256$ 、 $b = 128 \times 5 = 640$ が解の候補となります。これを与式に代入すると、正しいことがわかります。

ここから一般解を求めます。

$$\text{与式} \quad 17a + 7b = 128$$

$$(2)\text{式} \quad 17 \times (-256) + 7 \times 640 = 128$$

それぞれ引き算します。

$$17(a + 256) + 7(b - 640) = 0$$

$$17(a + 256) = 7(640 - b)$$

この式は 17 と 7 が互いに素であるため、 $a + 256$ は 7 の倍数、 $640 - b$ は 17 の倍数であることを示している。

ここで

$$a + 256 = 7n \quad n \text{ は整数}$$

とおいて与式に入れると、

$$17(7n - 256) + 7b = 128$$

となり、

$$b = 620 - 17n$$

となる。つまり $(a, b) = (7n - 256, 640 - 17n)$ 但し n は整数である。

検算として、 $n=37$ とすると $(a, b) = (3, 11)$ も解の候補になります。

$$17 \times 3 + 7 \times 11 = 128$$

となり、計算が正しいことがわかります。検算は必ずしましょう。

この整数方程式を解くには、これ以外にも合同式を使う方法があります。