

電磁気学演習 10章 電磁波と波動方程式

1. 電磁界の波動方程式

空気あるいは真空中において、電界および磁場の振動があるとで、電磁波として波の伝搬を起さる。電磁波は波長によって呼称が異なるが、光もX線も電磁波である。電磁波は波の式で記述できる。仮にz軸方向に進む波である時刻tでの波の磁場の振幅 $B(z, t)$ と電界の振幅 $E(z, t)$ は次のように書くことができる。

$$\text{電界の波の式 } E(z, t) = E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\text{磁場の波の式 } B(z, t) = B_0 \sin(\omega t - kz)$$

この式で E_0 と B_0 は、電界、磁場の振幅（最大値）である。 k は波数といい、 $2\pi[\text{m}]$ 中の波の数で、 $2\pi/\lambda$ で表される。 ω は角周波数で $2\pi f$ (f は周波数) である。電界も磁場はベクトルで記載されるが、一つの電磁波において、ベクトル E と B は直交する。

この波の式を満たす方程式を波動方程式といい、次のように表すことができる。

$$\text{電界の波動方程式 } \nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{d^2 \mathbf{E}}{dt^2} = 0$$

$$\text{磁場の波動方程式 } \nabla^2 \mathbf{B} - \mu\epsilon \frac{d^2 \mathbf{B}}{dt^2} = 0$$

これらの式の導出は、マクスウェル方程式から導くことができる。

2. 電磁波の速度（光速）

波の式を波動方程式に代入すると、

$$c = f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (\text{光速の導出の式})$$

と求められ、こちらは波の速度 c であり、光速になる。

3. 電磁波の特性インピーダンス

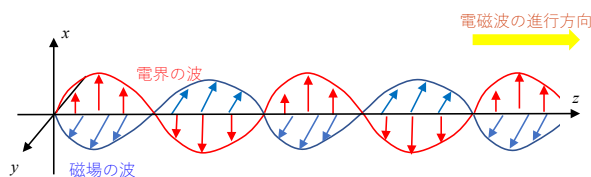
電磁波の伝搬を考えるときに、波の式を波動方程式に代入すると、電界の振幅と電場（磁束密度）の比が求められ、 $E_0/B_0 = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ となる。電磁波の特性インピーダンス Z は、磁界と電界の振幅比を特性インピーダンスといい、

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

となる。この特性インピーダンスは波の反射を議論するときには活用する。

3. 波の伝搬のイメージ

電界の波が x 方向に振幅をもち、 z 軸方向に進行するときに、磁場は B の直交する y 軸の方向に振幅を持つ。



例題1 頻出 マクスウェル方程式から出発して、電界の波動方程式を求めなさい。

空間において、空気あるいは真空を仮定し、電流が存在しないとする。
電磁誘導の式から出発する。

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

この両辺の rot をとります。

$$\text{rot rot}\mathbf{E} = -\frac{d \text{rot}\mathbf{B}}{dt}$$

左辺はベクトル演算の公式をつかって

$$\text{rot rot}\mathbf{E} = \text{grad div}\mathbf{E} - \text{div grad}\mathbf{E} = \text{grad div}\mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

となる。ここで $\text{div}\mathbf{E} = 0$ より

$$\text{rot rot}\mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{d \text{rot}\mathbf{B}}{dt}$$

また右辺の $\text{rot}\mathbf{B}$ は、アンペールの式 $\text{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{d\mathbf{E}}{dt}$ より、 $\mathbf{J}=0$ となるため

$\text{rot}\mathbf{B} = \mu\varepsilon\frac{d\mathbf{E}}{dt}$ になる。したがって、

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\varepsilon\frac{d^2\mathbf{E}}{dt^2}$$

これで電界の波動方程式が求められる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{d^2\mathbf{E}}{dt^2} = 0$$

例題2 頻出 マクスウェル方程式から出発して、磁場の波動方程式を求めなさい。

アンペールの式 $\text{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{d\mathbf{E}}{dt}$ から出発する。空間に電流はないという仮定から、
 $\mathbf{J}=0$ である。

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu\varepsilon\frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

となる。この両辺の rot をとる。

$$\text{rot rot}\mathbf{B} = \mu\varepsilon\frac{d \text{rot}\mathbf{E}}{dt}$$

左辺はベクトル演算の公式をつかって

$$\text{rot rot}\mathbf{B} = \text{grad div}\mathbf{B} - \text{div grad}\mathbf{B} = \text{grad div}\mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B}$$

となる。 $\text{div}\mathbf{B} = 0$ であるから、

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{E}}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad \text{より}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\epsilon \frac{d^2 \mathbf{B}}{dt^2} = 0$$

これが磁場の波動方程式である。

例題 3 電界の波の式として $\mathbf{E} = (A \sin(kz - \omega t), 0, 0)$ を仮定して、電界の波動方程式から光速 c を求めなさい。

電界の波動方程式は、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{d^2 \mathbf{E}}{dt^2} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{である。}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (E_x, E_y, E_z) = \mu\epsilon \frac{d^2}{dt^2} (E_x, E_y, E_z)$$

$\mathbf{E} = (A \sin(kz - \omega t), 0, 0)$ より、 x 成分のみを取り出すと

$$\text{スカラー方程式 } \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{d^2 E_x}{dt^2} = 0 \quad \text{となる。}$$

この式に $E_x = A \sin(kz - \omega t)$ を代入する。

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -Ak^2 \sin(kz - \omega t)$$

$$\mu\epsilon \frac{d^2 E_x}{dt^2} = -\mu\epsilon \omega^2 A \sin(kz - \omega t)$$

これを波動方程式に代入すると、

$$k^2 = \mu\epsilon \omega^2$$

の関係がでてくる。

$$\text{波数 } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{角周波数 } \omega = 2\pi f$$

$$\text{から、} \quad f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (\text{光速の式})$$

ともとめられる。 $f\lambda$ は c (光速) である。

例題 4 電界ベクトル $\mathbf{E} = (E_0 \sin(kz - \omega t), 0, 0)$ として、磁束密度の振幅を求めなさい。

$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ を使う。

$$\text{rot}\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 \sin(kz - \omega t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} E_0 \sin(kz - \omega t) - \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial y} E_0 \sin(kz - \omega t)$$

となる。 $\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial y} E_0 \sin(kz - \omega t)$ はゼロであるため、

$$\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} E_0 \sin(kz - \omega t) = \mathbf{j} k E_0 \cos(kz - \omega t) = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

となる。

$$\mathbf{B} = \mathbf{j} \frac{k E_0}{\omega} \sin(kz - \omega t) = \mathbf{j} E_0 \sqrt{\epsilon \mu} \sin(kz - \omega t)$$

となる。つまり、磁束密度の振幅は y 方向で E_0 の $\sqrt{\epsilon \mu}$ 倍の大きさとなる。

例題 5 物質中を伝搬する電磁波は、真空中に比べて伝搬速度は低下する。物質中の伝搬速度を v 、真空中の伝搬速度を c としたときに、物質の屈折率 $n (= c/v)$ は比誘電率のルートで表されることを示しなさい。

屈折率 n は、その物質中を伝搬する光の速度を v 、真空中の光速を c としたときに、

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

ϵ は物質中の誘電率、 μ は物質中の透磁率
 ϵ_0 は真空中の誘電率、 μ_0 は真空中の透磁率

となる。仮に、磁性がない材料の場合は、透磁率はほぼ真空の透磁率に等しい。このときに、

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_s}$$

となり、屈折率は比誘電率 ϵ_s の $\sqrt{\quad}$ になる。

例題 6 電磁波はその波長、すなわち周波数によって呼称が変わる。主な電磁波の名前と、波長範囲、さらにその応用例について述べなさい。

呼び名	波長範囲	応用
長波	1~10 km	船舶無線
中波	100~1000 m	AM 放送
短波	10~100 m	放送、無線
VHF	1~10 m	FM 放送 テレビ放送
UHF	0.1~1 m	FM 放送 テレビ放送 携帯電話
マイクロ波	1~10 cm	電子レンジ レーダー
ミリ波	1~10 mm	電波天文学 レーダー

赤外線	1~100 μm	ヒーター
可視光	0.38~0.83 μm	人間の視覚
紫外線	0.1~0.38 μm	日焼け、半導体製造、表面処理、殺菌
X線	0.001~10 nm	レントゲン、X線回折
Γ 線	10 nm~10 pm	放射線治療、天文観測

例題 7 電磁波として、一つの光線が輸送する単位時間、単位面積当たりのエネルギー P は、 $P = \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} B^2 / \mu \right) c$ で表されることを示しなさい。

単位体積当たりの電界のエネルギーは $\frac{1}{2} \epsilon E^2$ であり、磁束密度を B としたときに磁場の

単位体積当たりのエネルギーは $\frac{1}{2} B^2 / \mu$ であり、これが光速で輸送されるため、両者の光速倍が単位時間、単位面積当たりのエネルギーとなる。