

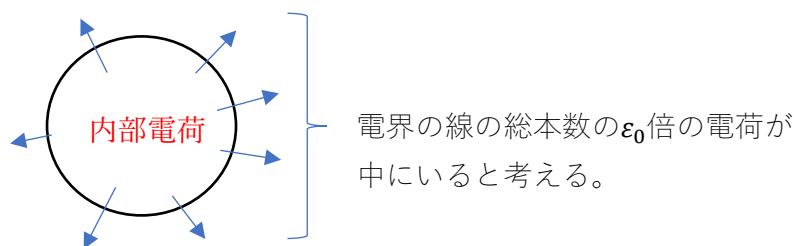
## 電磁気学演習 4章 ガウスの式を用いた静電界計算

### ポイント

#### 1. ガウスの式を使った電界の計算

電荷が発する電界の計算法として、電界の分布する形状を細かく点として分割し、分割した点を点電荷として、求めたい場所における点電荷の作る電界を求め、全分割点の作る電界ベクトルの総和を求める方法がある。この方法は万能であるが、机上計算には向かない。一方、電荷の分布が、球体、筒状、平面状であれば、電界放射の対称性から、ガウスの式を使って簡単にその強度を求めることができる。

ガウスの式の基本的な考えは、場の誘電率を $\epsilon_0$ とすると、1Cの電荷から $1/\epsilon_0$ 本の電界の線が出ていると考える。1m<sup>2</sup>を通過する電界の線の本数を電界強度とする。閉曲面から出る電界の線の本数を全部数えて、それに $\epsilon_0$ との積が中身の電荷となる。



この概念を数式でかくと次のようになる。

$$\iint_{\text{閉曲面}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\text{中身の電荷}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ の $\mathbf{n}$ は閉曲面の法線であり、左項全体は閉曲面から出る電界の線の総本数になる。また、閉曲面と電界が直交していて、かつ閉曲面のどこでも電界強度が同じであれば、閉曲面の表面積を使って、

$$\text{閉曲面の表面積} \times E = \frac{\text{中身の電荷}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

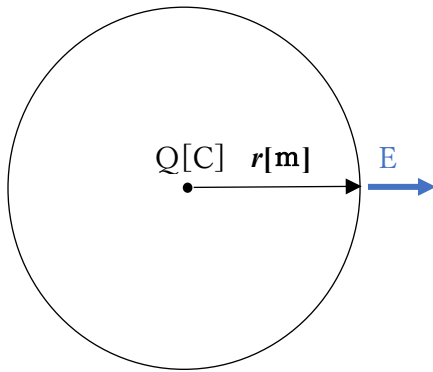
という簡単な式に帰着できる。

(1)式は積分の用いた式であるが、微分形では

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3)$$

と表される。

例題1 [点電荷問題] 点電荷  $Q[\text{C}]$  を真空中に置いたときに、点電荷からの距離  $r[\text{m}]$  の位置の電界の強さ  $E$  をガウスの式を使って求めよ。真空の誘電率は  $\epsilon_0$  とする。



このような点電荷や球状電荷の場合は、閉曲面として点電荷を中心とした半径  $r$  の球面を考える。ガウスの式の左項は、電界の閉曲面の面積分であり、電界  $\mathbf{E}$  と閉曲面は直交しており、しかも閉曲面のどこでも電界の強さは同じであることから、閉曲面の面積  $\times$  電界の強さ  $E$  で表される。つまり、左項は  $4\pi r^2 E$  となる。 $E$  はベクトルではなく、電界の強さである。

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

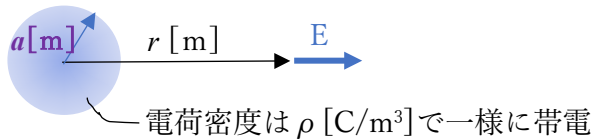
となり、

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

と求められる。

**※ミニ解説** 点電荷の作る電界の式のなかに  $4\pi r^2$  がでてきていたが、これは球の表面積からきていることが分かる。このように物理法則の式で、点から四方八方に均一に、これを等方的というが、等方的に影響を及ぼす現象については  $4\pi r^2$  が含まれることが多い。電磁気学では点電荷の電位の式やビオサバールの式などが例である。

例題2 [球状電荷] 半径  $a$  [m] の球体内部に一様に電荷が分布していて、その電荷密度は  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>] である。球体の中心からの距離  $r$  [m] の位置の電界の強さ  $E$  をガウスの式を使って求めよ。この空間の誘電率は  $\epsilon_0$  とする。



球状電荷の場合は、閉曲面として球の中心から半径  $r$  の球面を考える。  
 ガウスの式の左項は演習1の答えと同様に  $4\pi r^2 E$  となる。  
 ガウスの式の右項は半径  $a$  より遠い場合と近い場合で場合分けをする。

$r > a$  の場合

$$4\pi r^2 E = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho}{\epsilon_0}$$

ここで  $\frac{4}{3}\pi a^3$  は半径  $a$  の球の体積であり、電荷密度  $\rho$  をかけることで、半径  $a$  の球の全電荷になる。

$r \leq a$  の場合

$$4\pi r^2 E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{\epsilon_0}$$

ここでは、ガウスの閉曲面内全体が帯電していることになるので、ガウスの閉曲面の体積  $\frac{4}{3}\pi r^3$  をかけている。

答えは、

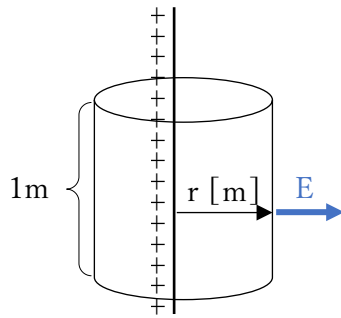
$r > a$  の場合

$$E = \frac{a^3 \cdot \rho}{3\epsilon_0 r^2}$$

$r \leq a$  の場合

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

例題3 [線状電荷] 無限に延びる直線状に、1 m当たり  $\lambda$  [C]で電荷が帯電しているときに、線からの距離  $r$  [m]の位置の電界の強さ  $E$ をガウスの式を使って求めよ。この空間の誘電率は  $\epsilon_0$ とする。



この場合は、閉曲面として半径  $r$  [m]で、高さ 1 mの円筒を考える。  
ガウスの式をおもいだそう

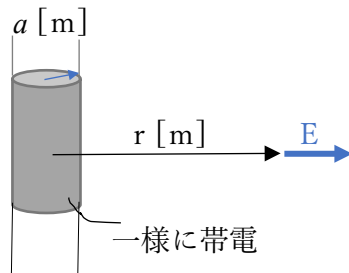
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\text{閉曲面で囲んだ中身の電気量}}{\epsilon_0} \quad \text{である。}$$

ここで左項は円筒の側面積が  $2\pi r$ であることから  $2\pi rE$ となる。  
ガウスの式は次のように書き換えられる。

$$2\pi rE = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

以上より  $E = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}$  となる。

例題4 [棒状電荷] 無限に延びる半径  $a$  [m] の円筒状に、1 m 当たり  $\lambda$  [C] で電荷が帯電している。電荷は円筒において均一に帯電しているとする。円筒の中心線からの距離  $r$  [m] の位置の電界の強さ  $E$  をガウスの式を使って求めよ。この円筒も含めて全空間の誘電率は  $\epsilon_0$  とする。



場合分けをする。

$r > a$  の場合

$$2\pi r E = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$r \leq a$  の場合

$$2\pi r E = \frac{\frac{\pi r^2}{\pi a^2} \lambda}{\epsilon_0}$$

$\frac{\pi r^2}{\pi a^2}$  であるが、この場合はガウスの閉曲面内部が帯電しており、その量は 1 m 当たり  $\lambda$  の半径  $a$  の面積分の半径  $r$  の面積になるからである。

答えは、

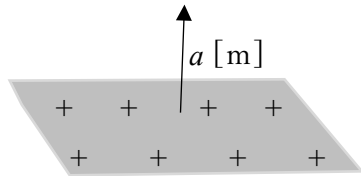
$r > a$  の場合

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

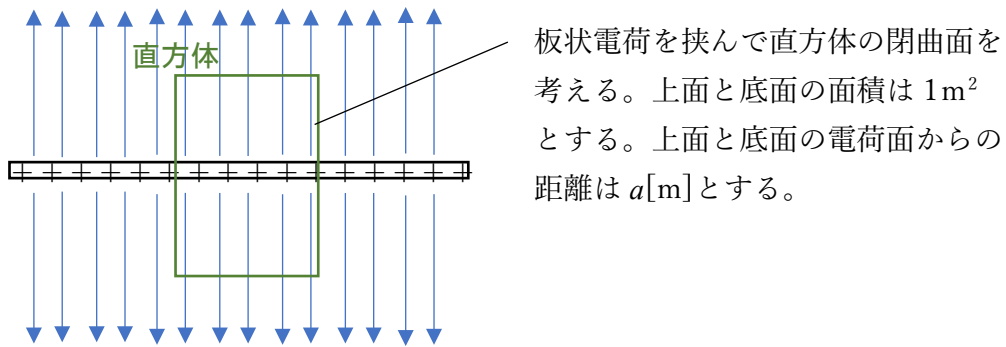
$r \leq a$  の場合

$$E = \frac{r\lambda}{2\pi a^2 \epsilon_0}$$

例題5 [面状電荷] 無限に広がるシートにおいて、1 m当たり  $\sigma$  [C]で電荷が一様に帯電している。シートから距離  $a$  [m]の位置の電界  $E$  の強さを求めよ。この空間の誘電率は  $\epsilon_0$  とする。



これは図のように、面を挟んで図のような直方体の閉曲面を考える。



板状電荷を挟んで直方体の閉曲面を考える。上面と底面の面積は  $1\text{m}^2$  とする。上面と底面の電荷面からの距離は  $a$  [m] とする。

これでガウスの式をたてる。

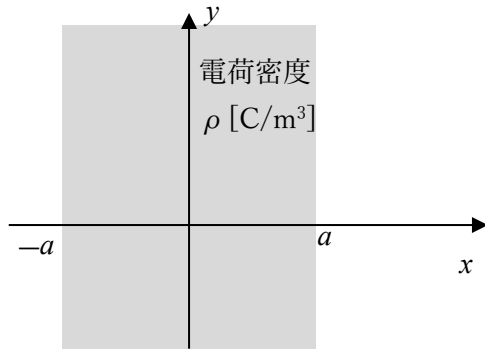
$$\iint_{\text{閉曲面}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} = (\text{上面の面積} + \text{底面の面積}) \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

上面および底面の面積は  $1\text{m}^2$  なので、

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

となる。この時点で距離  $a$  [m] は関係なくなる。

演習 6 [板状電荷] 次の面状に分布する電荷の中の電界強度をもとめてみる。xyz 座標において、 $-a < x < a$  の範囲で、電荷密度  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>] で分布しているとする。全空間の誘電率は  $\epsilon_0$  とする。



このような、板状に電荷が分布しているゾーンが板状である場合は、ガウスの式の微分形を使うと便利である。

$-a < x < a$  の範囲を考える。ガウスの微分形は

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

で表され、板状の場合、電界の方向は  $x$  方向に平行になるため、 $y$  方向および  $z$  方向の変化はないため、上の式は次のようになる。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1 回積分をすると、 $x$  方向の電界成分  $E_x$  は

$$E_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} x + C \quad \text{となる。} \quad C \text{ は積分定数}$$

この系は  $yz$  平面に対して対称であり、 $x=0$  で電界強度はゼロになるため、積分定数  $C$  もゼロでる。電界ベクトルの  $x$  成分は

$$E_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

となる。

$x > a$  の範囲では、電荷密度はゼロのため、

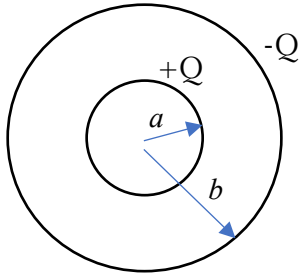
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

を解けばよい。この領域では  $E_x$  は定数になるが、 $-a < x < a$  の範囲のとの連続性から、

$$E_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} a$$

となる。 $x < -a$  の範囲では  $E_x = -\frac{\rho}{\epsilon_0} a$  となる。

例題7 [頻出 二重球殻電荷] 半径  $a$ [m]の球表面に電荷  $Q$ [C]、半径  $b$ [m]の球表面に電荷  $-Q$ [C]が帯電している。 $a > b$ とする。球内外の電界強度と二球面間の電位差を求めなさい。



次の通りガウスの式をたてる。

$$\iint_{\text{閉曲面}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds = 4\pi r^2 E = \begin{cases} 0 & r < a \\ Q & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

半径が  $b$ を超えると閉曲面内の電気量は正味  $0$  になることに注意する

上式を解くと

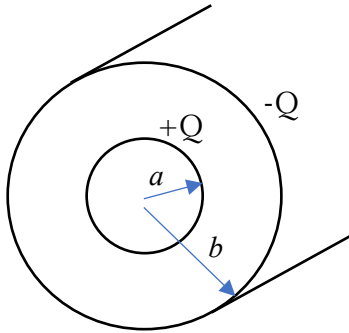
$$E = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

となる。電位差は次の通りである

$$V_{ba} = - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr = \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_b^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad [\text{V}]$$



例題8 [頻出 二重円筒電荷] 半径  $a$ [m] の無限に続く円筒表面に単位長さ当たり電荷  $Q$ [C/m]、半径  $b$ [m] の無限に続く円筒表面に単位長さ当たり電荷  $-Q$ [C/m] が帯電している。 $a > b$  とする。円筒内外の電界強度と二球面間の電位差を求めなさい。



次の通りガウスの式をたてる。

$$\iint_{\text{閉曲面}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds = 2\pi r E = \begin{cases} 0 & r < a \\ Q & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

半径が  $b$  を超えると閉曲面内の電気量は正味 0 になることに注意する。

上式を解くと

$$E = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

となる。電位差は次の通りである

$$\begin{aligned} V_{ba} &= -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \, dr = -\left[ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log r \right]_b^a = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{a}{b} \quad [\text{V}] \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a} \end{aligned}$$