

電磁気学演習 3章 電位と電界の関係

ポイント

1. 電位と電界の関係

電界とは、1Cの電荷を置いたときに場から受ける力であり、それはベクトルである。電位は1Cの電荷を基点からその場所へ動かすときの仕事であり、基点が定義されていないときは、無限遠点を考える。電界（ベクトル）と電位（スカラー）の関係は次のように表される。

1) 電界から電位を求めるとき

$$V = - \int_{\text{基点}}^{\text{対象点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ は電界ベクトルと積分経路の接線の単位ベクトルの積であり、電界 \mathbf{E} と積分経路の接線が角度 θ をなす場合は、

$$V = - \int_{\text{基点}}^{\text{対象点}} E \cos\theta dl$$

とスカラーの積分にすることができる。

2) 電位から電界ベクトルを計算するとき

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\nabla V \quad \text{ただし } \text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \text{ の偏微分で表される。}$$

grad はグラディエントと呼ぶ。この式の $\frac{\partial V}{\partial x}$ は、 V を x のみを変数として、他の変数は定数として微分するという意味である。

2. 電界があるときに、その場所の電荷密度を求める。

ガウスの法則の微分系を使って求める。単位体積中の電荷（電荷密度）を ρ とすると、

$$\rho = \epsilon_0 \text{div}\mathbf{E} \quad (\text{ガウスの法則の微分形})$$

であり、 ϵ_0 は空間の誘電率である。 $\text{div}\mathbf{E}$ はダイバージェンス \mathbf{E} と読み、

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

である。 E_x は電界ベクトル \mathbf{E} の x 成分である。

例題 1 点電荷が作る電界の式から電位を求める問題

原点に電荷 Q [C]を置いたときに、距離 r [m]の位置の電界ベクトルを答えなさい。このときの電位 V を求めなさい。場は真空を仮定し、誘電率は ϵ_0 とする。

点電荷の作る電界の式は、

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

である。電位 V は

$$V = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ともとられる。 $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$ であるが、 $d\mathbf{r}$ は経路積分の積分要素で、大きさは1、 $\hat{\mathbf{r}}$ とは同じ方向なので、内積をとると1になる。

例題 2 点電荷が作る電位の式から電界ベクトルを求める問題

点電荷 Q がつくる距離 r の位置の電位は

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ で表される。}$$

位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とにおいて、電界 \mathbf{E} を求めよ。

点電荷の作る電界の式が導かれる。

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

を計算すればよい。

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \text{ となる。}$$

したがって、

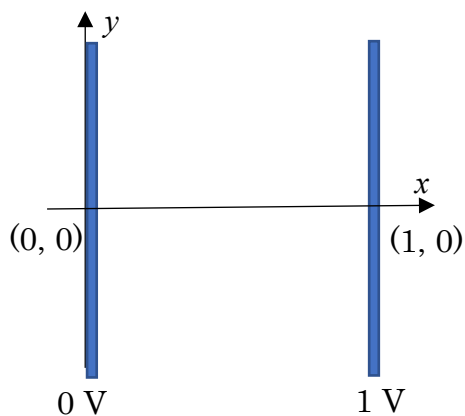
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

と求められ、 $\hat{\mathbf{r}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ より、

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \text{ と求められる。}$$

例題3 線積分に慣れる

次のように、距離が1m離れた平行平板に図のように電位がかけられている。電界ベクトル \mathbf{E} は $(-1, 0, 0)$ で与えられる。線積分を使って右の平板の電位が1Vになることを確かめなさい。



計算のため図のような x - y 座標を考える。原点から座標 $(1, 0)$ までの線積分を計算する。

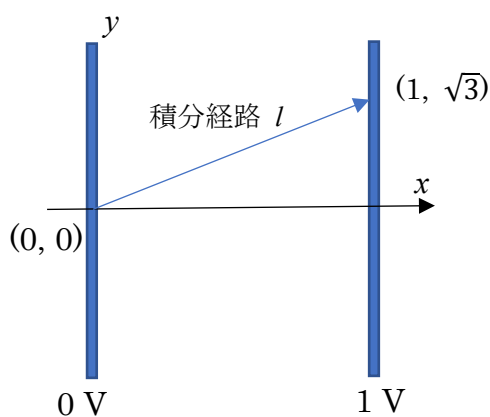
$$V = - \int_0^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$$

積分経路は、 x 軸と平行なので、微小積分要素を $d\mathbf{x}$ とする。太字でベクトルである。・は内積を表す。内積はなす角度を θ とすると、スカラーと $\cos \theta$ の積になる。

$$V = - \int_0^1 E \cos \theta dx = - \int_0^1 E \cos(180^\circ) dx = \int_0^1 dx = 1$$

この式において、電界ベクトルと積分方向が正反対なので、角度は 180° になることに注意する。

例題4 例題3の問題で $(1, \sqrt{3})$ の位置の電位を計算し、同じ1Vになることを示しなさい。



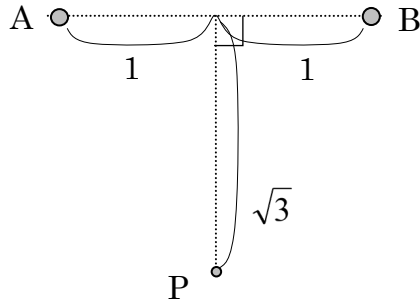
図のように積分経路 l を定める。

積分経路の距離は2で、電界ベクトルとなす角度は 120° なので、

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^2 |\mathbf{E}| \cos \theta dl \\ &= - \int_0^2 \cos(120^\circ) dl = \frac{1}{2} \int_0^2 dl = 1 \end{aligned}$$

※ミニ解説 このように二点間の電位差が等しいときに、どのような積分経路をとっても計算される電位差は同じになる。当たり前の結論だが、あえて練習のために出題した。

例題 5 図のように、点 A に $Q[C]$ 、点 B に $2Q[C]$ が $2[m]$ 離れて置かれている。このとき点 P における電位 V を求めよ。



電位は、電荷の大きさと電荷とその場所との距離できまる。AP の距離は 2、BP の距離も 2 である。

P 点の電位は

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0} \quad [V]$$

となる。

例題 6 位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と表されるとき、その大きさ r および単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ を求めよ。さらに、このベクトルの発散 $\text{div } \mathbf{r}$ を求めよ。

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。

$$\hat{\mathbf{r}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

となる。 $\text{div } \mathbf{r}$ は

$$\text{div } \mathbf{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}$$

である。これは偏微分といい、 $\frac{\partial r_x}{\partial x}$ は x 以外の変数は定数とみなして、 r の x 成分を x で微分とするという意味である。

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial r_y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial r_z}{\partial z} = 1 \text{ より、}$$

$$\text{div } \mathbf{r} = 3$$

例題 7 半径 a [m] の球の表面に均一に電荷が帯電しており、その量は Q [C] である。このとき、半径 r の位置での電界の強さは、

$$E = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \end{cases}$$

であらうことができる。 ϵ_0 は場（真空）の誘電率である。このときの電位を r の関数として求めよ。

無限遠点を基点に、経路積分を行えばよい。

$r > a$ では

$$V = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$0 < r < a$ では、

$$V = - \int_a^0 0 dr - \int_{\infty}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

ここで、 $r > a$ と $0 < r < a$ で電界の関数が変わるので、積分経路を二分して求めることに注意する。

※ミニ解説 電位を電界から計算で求めるときに、必ず電位の基準、すなわち線積分の基点を与える必要がある。この基点は、アースであり、電位 0 V の地点である。電磁気学では、この電位の基点が与えられていないときは、暗黙で無限遠点を基点とする。