

電磁気学基礎 1章 電磁気学で使うベクトル演算

1. 位置ベクトル

電磁気学では物体の位置を示すのに、位置ベクトルが使われる。位置ベクトルは基準点を $O(x_0, y_0, z_0)$ とすると、ベクトルの先 $P(x_1, y_1, z_1)$ 点とするとときに、 P 点の位置ベクトル \overrightarrow{OP} は

$$\overrightarrow{OP} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

で表される。通常位置ベクトルの標記に \mathbf{r} は、基準の位置が明示されなければ、原点となる。

2. ベクトルの大きさ（長さ）とその単位ベクトル

ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とするとき、

ベクトルの大きさ（長さ） $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

単位ベクトル

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

3. ベクトルの ijk 表示

ベクトルはしばしば次のように表示される。

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

ここで $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ xyz 方向の単位ベクトルである。

4. ベクトル加減算

ベクトルは文字通り線形代数で言われるベクトルあり、次の加算と定数倍に関する性質を持つ。

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

$$c\mathbf{A} = (cA_x, cA_y, cA_z), \quad c \in R \quad (c \text{ は実数という意味})$$

5. ベクトルの内積

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

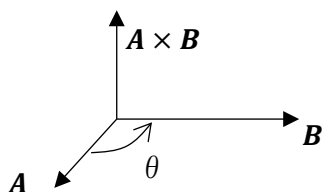
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \theta$$

ただし θ はベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} のなす角度である。ゴシックではない A, B はベクトルの長さを表す。

6. ベクトルの外積

外積は次の計算と方向のイメージとして記憶する。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y, \quad A_z B_x - A_x B_z, \quad A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned}$$



$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は、 \mathbf{A} ベクトル、 \mathbf{B} ベクトルに対して垂直方向で、 \mathbf{A} から \mathbf{B} に巻く方向に対して右ネジの方向と覚える。なお大きさについては

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$$

がなりたつ。つまり $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ は \mathbf{A}, \mathbf{B} ベクトルの作る平行四辺形の面積を表す。



外積の計算において次の性質が成り立つ。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad \text{積順序逆はマイナス}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{同じベクトルの外積は0}$$

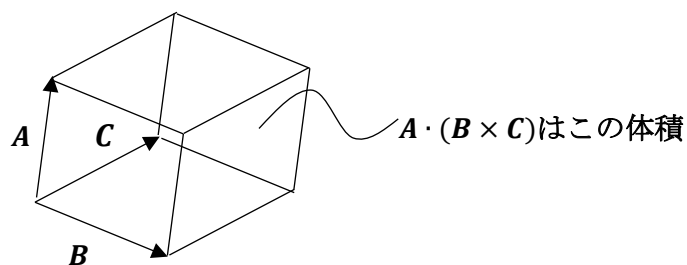
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad \text{外積は分配して積、方向に注意}$$

7. スカラーの三重積

ベクトル \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} が同一平面にないときに

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

をスカラーの三重積といい、その絶対値はベクトル \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} の作る平行六面体の体積になる。



次の関係がなりたつ。

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

外積されたベクトルが内積と同じ方向であれば、正の値をとり、体積となる。逆の場合は負の数値を取る。

また、

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad \mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$$

となる場合、

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

となる。

8. ベクトルの微分

あるベクトルが t の関数で表されるときに

$$\mathbf{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t))$$

となるときに、

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \left(\frac{dA_x(t)}{dt}, \frac{dA_y(t)}{dt}, \frac{dA_z(t)}{dt} \right)$$

で表される。また、微分には次の性質がある。

$$\frac{ds(t)\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt}\mathbf{A}(t) + s(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\{\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)\}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \times \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \times \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$$

9. スカラーの勾配 grad

スカラー関数 φ が位置座標 x, y, z の関数であるときに、

$$\mathit{grad} \varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$$

は勾配と呼ばれる。 grad はグラディエント、 ∇ はナブラとよぶ。

$$\varphi(x, y, z) = c \quad \text{但し } c \text{ 定数}$$

であるときに、これは曲面あるいは平面を表しており、 $\mathit{grad} \varphi$ はその点の等位面での法線方向を表し、大きさは傾きを表す。

10. ベクトルの発散

ベクトル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ を仮定するときに、

$$\mathit{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

で、 div をダイバージェンスといい、発散を意味する。

11. スカラーのラプラシアン

ベクトル $\varphi(x, y, z)$ を仮定するときに、

$$\mathit{div} \mathit{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

これをラプラシアンという。

12. ベクトルの回転

ベクトル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ を仮定するときに、

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

これを回転、ローテーションという。

特に電磁気学においては次の微分に関する変換公式を覚えておきたい。

勾配の回転は $\mathbf{0}$ $\text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}$

回転の発散は $\mathbf{0}$ $\text{div rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$

回転の回転 $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$

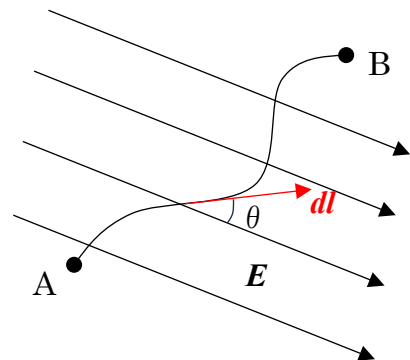
13. 線積分

あるベクトル場（ここでは \mathbf{E} とする）があるときに、線分 AB に沿ってその方向成分で積分する計算を線積分という。積分要素は線に沿った長さ 1 のベクトルであらわされ、ここでは $d\mathbf{l}$ で表記すると、線積分は次のように書かれる。

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B E \cos \theta dl$$

ベクトルと積分要素と積分されるベクトル \mathbf{E}

との角度が θ であるときに、ベクトル \mathbf{E} の長さ E と $\cos \theta$ の積の積分で求められる。

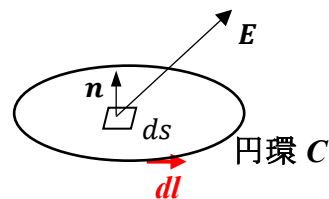


14. ストークスの定理

円環にそってベクトルの線積分を取るときに、円環内のベクトルの回転の面積積分に書き換えられる。

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{円環}C \text{内}} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds$$

\mathbf{n} は円環内の微小面積 ds の単位法線ベクトルである。

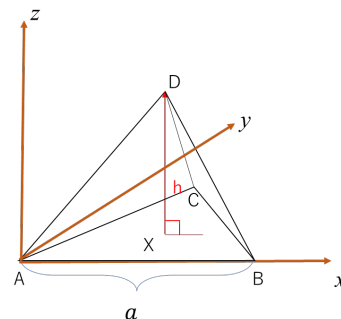


練習問題1 一辺の長さが a の正四面体の高さを求めなさい。

正四面体を右図のように xyz 座標にあわせてみる。

ここで各座標は次のようにあらわされる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix}$$



ここで、頂点の D から底面に垂線を下した位置を X とすると、 X は底面三角形の重心になる。重心の公式をつかって、 X 点は次のように求められる。

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ 0 \end{pmatrix}$$

高さを h とすると、 D 点は

$$D = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix}$$

である。ここで \overrightarrow{AD} は

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix}$$

となり、その長さは a となるので、

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + h^2} = a^2$$

これを解くと、 $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ と求められる。

練習問題 2

$\mathbf{A} = (2, 3, 1)$ 、 $\mathbf{B} = (1, 1)$ とする。次の式を計算しなさい。

- (1) A
- (2) B
- (3) $\hat{\mathbf{A}}$
- (4) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- (5) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
- (6) \mathbf{A} と \mathbf{B} の成す角度

解答

- (1) $A = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{15}$
- (2) $B = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- (3) $\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, 3, 1)$
- (4) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 5$
- (5) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) + \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(2 - 3) = (-1, 1, -1)$

練習問題 3 次の勾配の問題を計算しなさい。

- (1) $\varphi = xy^2(x - z)$ として、 φ の勾配 $grad \varphi$ ($\nabla \varphi$)
- (2) 位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ として、 r の勾配 $grad r$ (∇r)

解答

- (1) $\varphi = xy^2(x - z)$

$$grad \varphi = (y^2(x - z) + xy^2, 2xy(x - z), -xy^2)$$

- (2) 位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ として、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$grad r = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

練習問題 4 次の発散の問題を計算しなさい。

$\mathbf{A} = (xy, yz, zx)$ として、 \mathbf{A} の発散 $div \mathbf{A}$ ($\nabla \cdot \mathbf{A}$)

解答

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = y + z + x$$

練習問題 5 次の回転の問題を計算しなさい。

(1) $\mathbf{A} = (xy, yz, zx)$ として、 \mathbf{A} の回転 $\operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\nabla \times \mathbf{A})$

(2) $\varphi = xy^2(x - z)$ として、 $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \quad (\nabla \times \nabla \varphi)$

解答

(1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-y) + \mathbf{j}(-z) + \mathbf{k}(-x) = -(x, y, z)$$

(2)

$\operatorname{grad} \varphi = (y^2(2x - z), 2xy(x - z), -xy^2)$ より

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ y^2(2x - z) & 2xy(x - z) & -xy^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-2xy + 2xy) + \mathbf{j}(-y^2 + y^2) + \mathbf{k}(-2xy^2 + 2y^2x) \\ &= \mathbf{i}(0) + \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

練習問題 6 次の線積分の問題を計算しなさい。

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \text{ として、} -\int_{\infty}^r r^{-2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$$

解答

$$-\int_{\infty}^r r^{-2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^r r^{-2} dr = \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = \frac{1}{r}$$