電磁気学演習　9章　　マクスウェル方程式

1. マクスウェル方程式

電磁気学で学ぶ原理はマクスウェル方程式と呼ばれる物理方程式で表現される。その表現に積分形と微分形があるが、通常微分形である。マクスウェル方程式は、主要方程式のアンペールの式、電磁誘導の式の二式ことをいい、この他、電界のガウスの式と、磁場に湧き出しはないという意味の式の二式を補助方程式として加えて、併せて四式とする場合がある。なお主要方程式から補助方程式は導出可能で、主要二式のみの提示で十分である。

アンペールの式

$$rot\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$$

B　磁束密度ベクトル、 $\boldsymbol{J}$　電流密度ベクトル、μ　透磁率

ε　誘電率、　**E**　電界ベクトル

電磁誘導の式

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

電荷におけるガウスの式　（補助方程式）

$$div\,\boldsymbol{D} = \rho$$

$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$　電束、　ρ　電荷密度

磁場に湧き出しはない　（補助方程式）

$$div\,\boldsymbol{B} = 0$$

2.　変位電流

マクスウェル方程式のアンペールの式中の$\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$は、変位電流と呼ばれている。誘電体空間ではその領域に電界の時間変化があると、見かけ上そこに電流が流れているように振る舞う。変位電流があると、直接の導電電流がなくても、それを取り巻く磁場は発生する。

2. ストークスの定理

アンペール式の積分形から微分形に変換するときに使う、ベクトル変換公式である。磁場を一周にわたって線積分した量は、その周回内の rot（回転）の面垂直成分の面積積分に等しい。

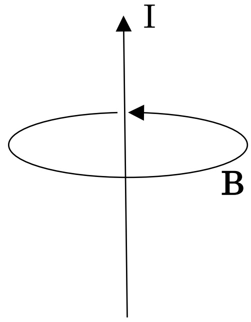
$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \iint_S rot\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

この式において、Cは一周する輪であり、$\boldsymbol{dS}$は周回内の微小面積を表すベクトルであり、方向は面に垂直であり、長さは1である。

例題１　アンペールの式の積分形から出発して、マクスウェル方程式のアンペールの式（微分形）を導出しなさい。

電流を取り囲む経路のループ C において

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl}=\mu I \qquad ①$$



がアンペールの積分形である。これは右のように電流の周りの磁場の輪のイメージであるが、コンデンサのようにそこに直接電流が流れなくても、コンデンサの極板間の周りに磁場の輪ができることを、この式に含めるために、

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl}=\mu I+\mu S\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$$

と補正される。ここで、S はコンデンサの極板面積である。

　この式をストークスの定理を使って整理する。

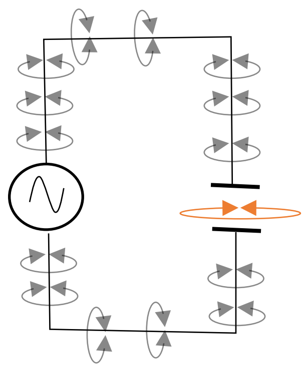
左辺$=\int_C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl}=\iint_S rot\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$

右辺$=\mu I+\mu S\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}=\iint_S\left(\mu\boldsymbol{J}+\mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$

となり、両辺等号により

$$rot\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}+\mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$$

が求められる。

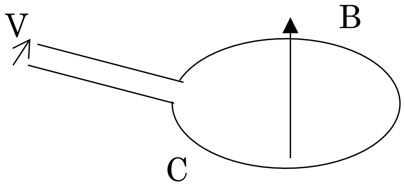


極板間では SεdE/dt の電流がながれているとみなせる。

例題２　電磁誘導の式の積分形から出発して、マクスウェル方程式の電磁誘導の式（微分形）を導出しなさい。

　１回巻コイルがあったときに、電磁誘導起電力はつぎのように表される。

$$V=-\frac{d\phi}{dt}$$



ϕは鎖交磁束といって、

$$\phi=\int_S B\cdot\boldsymbol{n}dS \qquad ①$$

で表すことができる。

一方、電圧Ｖはループ C の周りの電界の線積分で表すことができる。

V= $\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$　右回りの方向に積分するので、今回はーはつけない。

この式はストークスの定理を使うと、

V= $\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_s rot\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n}dS$　②

となる。

①と②から、

$\int_s rot\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n}dS = -\int_S \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot \boldsymbol{n}dS$　となり、

$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$が求まる。

例題３　補助方程式の一つ、$div\,\boldsymbol{B} = 0$（磁場に湧き出しはない）をマクスウェル方程式の主要方程式から導きなさい。

これは電磁誘導の式$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$の両辺の$div$をとることで求められる。

$$div\,rot\boldsymbol{E} = -div\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = -\frac{ddiv\boldsymbol{B}}{dt}$$

となる。ベクトル演算の法則より、ベクトルの rot をとって、その div をとると、ゼロになる性質を使う。この式の右辺はゼロである。

$$\frac{ddiv\boldsymbol{B}}{dt} = 0$$

この時間積分をとると

divB= C(積分定数)

となるが、この世界で磁束密度が単独で湧き出す現象は見出されていないので、C はゼロとなり、$div\,\boldsymbol{B} = 0$となる。

例題 4　ガウスの法則$div\,\boldsymbol{D} = \rho$について、マクスウェル方程式の主要方程式から導きなさい。

アンペールの式$rot\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$　から導かれる。もし、空間に電流が流れていないとし、$\boldsymbol{J}$＝0 とする。

$$rot\boldsymbol{B} = \mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$$

この両辺の div をとると、$divrot\boldsymbol{B}$は常にゼロとなる。

$$divrot\boldsymbol{B} = \mu\varepsilon\frac{ddiv\boldsymbol{E}}{dt} = 0$$

時間 t で積分すると、

$\mu\varepsilon div\boldsymbol{E} = C(積分定数)$

となる。実際の現象をみると、C は ρ μとなるので、$\varepsilon div\boldsymbol{E} = div\,\boldsymbol{D} = \rho$と求められる。

例題 5　電気回路で使われる、キルヒホッフの電流則、すなわち電流の湧き出しがないことをマクスウェル方程式から示しなさい。

アンペールの式$rot\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$から求められる。電線中、すなわち金属の中を仮定して、アンペールの式のdivをとる。金属中では電流は存在するが、電界 **E** はゼロとなる。

$divrot\boldsymbol{B} = \mu div\boldsymbol{J} = 0$

となり、$div\boldsymbol{J} = 0$が導かれる。これは電流に発散はない、ある点に電流が入ってきたらかならず出ていかなければならないというキルヒホッフの電流則を意味する。

例題 6　ある空間で電界$\boldsymbol{E}$が x 方向で振動していたとする。ベクトルとして、$\boldsymbol{E} = (E_0 sin(kz - \omega t), 0,0\,)$とする。このときに発生する磁場（磁束密度）を求めなさい。

これはファラデーの電磁誘導の式、$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$　を使う。

$$rot\boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 sin(kz - \omega t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial z}E_0 sin(kz - \omega t) - \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial y}E_0 sin(kz - \omega t)$$

となる。 $\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial y}E_0 sin(kz - \omega t)$はゼロになるので、

$$rot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial z}E_0 sin(kz - \omega t) = \boldsymbol{j}kE_0 cos(kz - \omega t) = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

となる。したがって、

$$\mathrm{B} = \boldsymbol{j}\frac{kE_0}{\omega}sin(kz - \omega t)$$

と求めらる。つまり、磁束密度はｙ方向に$\frac{kE_0}{\omega}sin(kz - \omega t)$で発生する。