電磁気学基礎　５章　　電流の作る磁界　ビオサバールの式

1. **磁界と磁束密度**　磁石がＮ極とＳ極で互いにひきつけあうのは、磁石から磁力線（磁束線ともいう）が発せられるからである。電線に電流を流すと、電線周りに磁力線ができて、近くに方位磁石をおくと、その磁針をかたむける。このように磁石や電流の周りに発生する磁力線の大きさを、**磁界**あるいは**磁束密度**という。磁束密度は、単位面積（$1\mathrm{m}^2$）当たりを貫く磁力線の数で、単位はテスラ（T）で、記号ではＢと書く。磁束密度は、大きさと同時に方向をもっていて、**B**のようにして、ベクトルで表す。磁界は、ややこしいところだが、この言葉で磁束密度を表すこともあるが、多くの場合は磁石を作る原動力を意味し、単位はＡ（アンペア）/ｍで表す。このとき、記号はＨで、これもベクトル**H**で表す。

2. **磁束密度Ｂと磁界Ｈの関係**

$$B = \mu H$$

　μは透磁率であり、真空中では、$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$　N/A² の数字をとる。また物質中の比透磁率μ_sとし、物質固有の比例係数をかけて、$\mu = \mu_s \mu_0$とする。

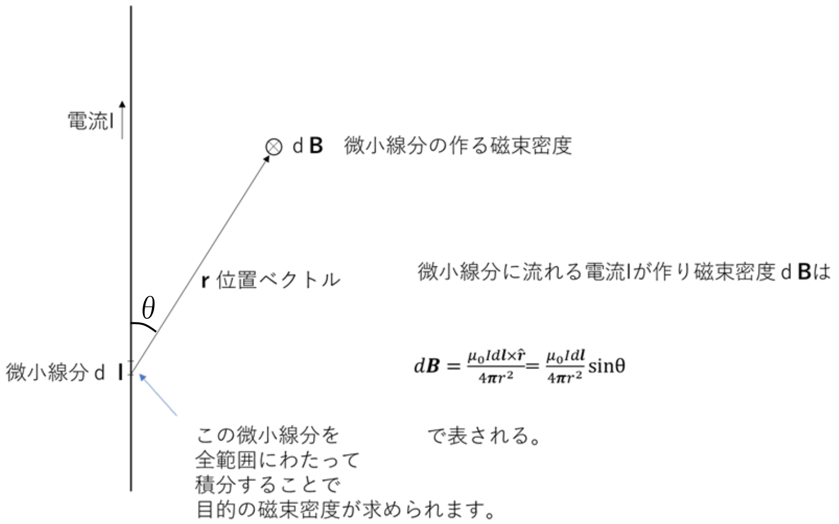
3. **無限直線電流の作る磁束密度**

　無限に伸びる直線電流から距離r［m］の位置にできる磁束密度の大きさは

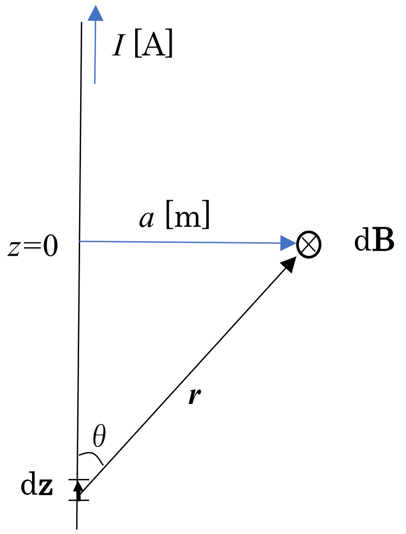
$$\mathrm{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

で表される。方向は右ねじの巻く方向である。

4. **ビオサバールの式**



例題１　無限に伸びる直線電流 I [A]が半径 a[m]の位置に作る磁束密度を求めなさい。透磁率はμ_0とする。（ビオサバールの式で導出）



z 軸上に電線があるとして、左図のような構成を考える。微小要素 dz の電流が半径 a [m]の位置に作る磁束密度を dB とする。ビオサバールの式を用いると次のようになる。

$$d\boldsymbol{B} = \mu_0 \frac{Id\boldsymbol{z}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}$$

$$dB = \mu_0 \frac{Isin\theta dz}{4\pi r^2}$$

となる。全区間を積分すると

$$B = \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Isin\theta dz}{4\pi r^2}$$

となる。ここで r は$r = \sqrt{z^2 + a^2}$、$sin\theta = \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}$であるので、

$$B = \int_{\mu_0-\infty}^{\infty} \frac{Ia}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} dz = \frac{Ia}{4\pi}\mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} dz$$

となる。ここで、変数変換 $z = atan\theta$とすると、$\frac{dz}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2\theta}$から$dz = \frac{\mathrm{a}}{\cos^2\theta} d\theta$ となる。

$\tan^2\theta + 1 = 1/\cos^2\theta$より

$$\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{(a^2\tan^2\theta + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^3}\cos^3\theta$$

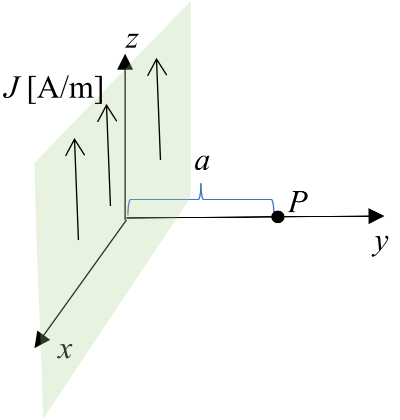
となり、

$$B = \frac{Ia}{4\pi}\mu_0 \int_0^{\pi} \frac{1}{a^3}\cos^3\theta \cdot \frac{\mathrm{a}}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{I}{4\pi a}\mu_0 \int_0^{\pi} cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

となる。

この結果は、無限直線電流の作る磁場の大きさの式として覚えておく。

例題 2　面状電流の問題　図のように xz 平面に z 軸に沿って電流が流れている。単位長さの幅当たり、J [A]流れるとする。xz 平面から距離 a[m]の位置にできる磁束密度の大きさを求めなさい。

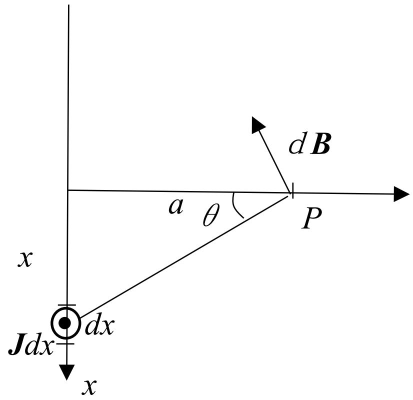


解答

xz 平面を上からみた図を示す。x の位置の微小区間の電流が P 点に作る磁束密度は

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi r} J dx = \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}} J dx$$

で表される。



xz 平面全体にわたって磁束密度を積分すると、最終的には磁束密度は－x *方向しか残らない。* P 点の磁束密度の－x 方向成分を B_{-x} とすると、

$$dB_{-x} = \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}} cos\theta J dx$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}} \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} J dx$$

$$= \frac{\mu_0 a}{2\pi(x^2+a^2)} J dx$$

$$B_{-x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 a}{2\pi(x^2+a^2)} J dx$$

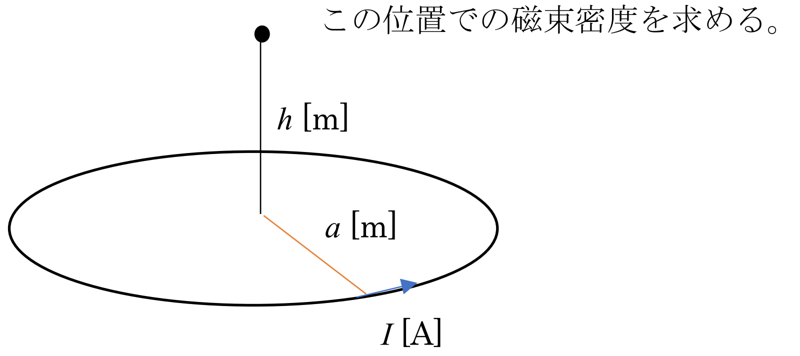
$x = a\, tan\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = a\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$B_{-x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{2\pi a(tan\theta^2+1)} J dx = J\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0}{2\pi} d\theta$$

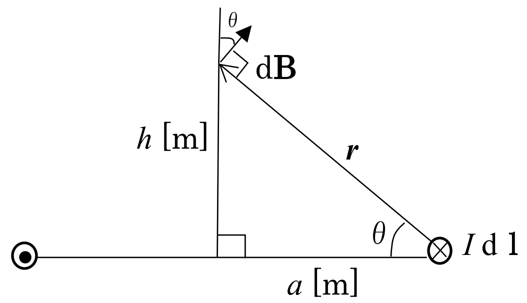
$$= J\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\mu_0}{2} J$$

※非常にわかりやすい式がでてきたが、この後学習するアンペールの式を使うとたちどころに計算できる。

例題３　円電流の作る磁場の計算　図のように半径 a[m]の I [A]の円環電流が高さ h[m]の位置に作る磁束密度を求めよ。（ビオサバールの式で導出）



下の図のように断面を考える。



図のように微小電流 I d l が作る磁束密度 dB は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に対して、直角の方向に向いている。なお位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と電流の方向は直交しているため

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$$

となる。

円環全部を積分して足し合わせると、ｄＢの鉛直成分しか残らない。鉛直成分を $\mathrm{B}_\perp$ とすると、

$$\mathrm{B}_\perp = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int dl \times cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot 2\pi a \cdot \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}$$

と求められる。

仮に高さ h がゼロの場合、

$$\mathrm{B}_\perp = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

となる。