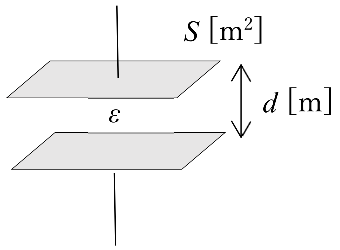
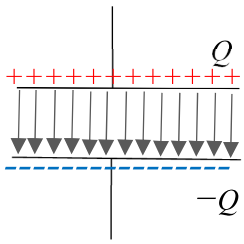
電磁気学演習　5 章　　コンデンサ

ポイント

1.　平行平板コンデンサ





　コンデンサの名前は蓄電器の condenser からきている。平板電極の面積を S、電極間距離を d、平板間の誘電率を ε とすると、平行平板コンデンサの容量 C は

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad \varepsilon = \varepsilon_s \varepsilon_0$$

で表され、ε_s は比誘電率、ε_0 は真空の誘電率である。

　コンデンサ C はコンデンサにかけられる電圧を V、蓄積される電荷 Q とすると、Q=CV の関係がある。コンデンサに電圧をかけると、左図のように電荷が蓄積され、上下の電荷はそれぞれ正負の符号は違うが同じ量である。電界のベクトルは電極間に局在する。

2.　平行平板コンデンサのエネルギー

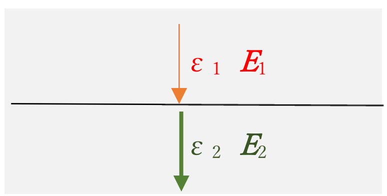
　電荷 Q[C]で、極板間の電圧 V[V]、コンデンサ容量を C[F]とすると、コンデンサに貯められるエネルギーU[J]は、

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

である。平行平板コンデンサに蓄積されるエネルギーは、平行平板間の電界のある部分に**静電エネルギー**として蓄積される。単位体積当たりの静電エネルギーは$\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ である。静電エネルギーを電極間の体積の前空間で積分すると、コンデンサの蓄積エネルギーの$\frac{1}{2}QV$ と一致する。

3.　異なる誘電率の界面を貫く電界の扱い

　二重誘電体コンデンサのところでも扱うが、誘電率の異なる二領域を電界が通過するときに、電界の界面の垂直成分は、誘電率と電界の積（電束）が等しくなるという性質がある。これを知っていると、二重誘電体問題が簡単に解けるようになる。なお、界面と平行な電界成分は等しくなる。

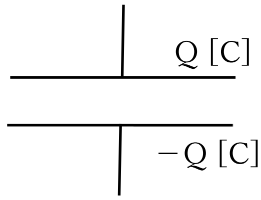


$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}$　界面の垂直成分

$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$　界面と平行成分

例題１　電極間距離 d[m]で、電極面積 S[m^2]の平行平板コンデンサーの静電容量をもとめなさい。電極間の誘電率はε$_0$とする。

図のようにコンデンサの両極に Q[C]、−Q[C]の電荷を与える。このとき、電極において単位面積当たりの電荷 σ は



$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

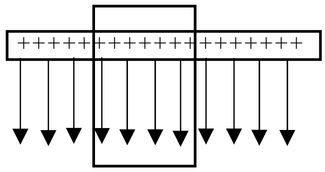
となり、上部電極では σ、下部電極では−σ で帯電していることになる。

ガウスの法則より、単位面積当たり σ の電荷から、電界が下に出ている。つまり電界の大きさ E は

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

となる。

単位面積当たり σ がいて、下に電界がでている



平行平板間の電圧 V は、

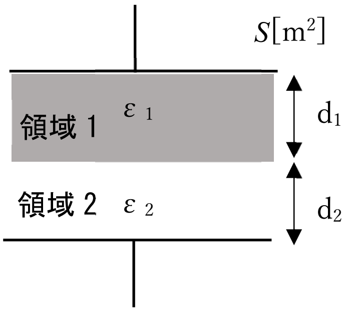
$$V = E \times d = \frac{dQ}{\varepsilon_0 S}$$

となる。
静電容量 C は Q÷V であたえられるので、

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

となる。

例題２　**頻出**　次のような二重誘電体コンデンサの静電容量を求めなさい。



これも 1 の問題と同様、コンデンサの両極に Q[C]、−Q[C]の電荷を与える。電極での単位面積当たりの電荷 σ は　$\sigma = \frac{Q}{S}$となり、上部電極では σ、下部電極では− σ が帯電する。

領域 1 での電界強度 E_1 は、

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_1 S}$$

となる。領域 2 での電界強度E_2は、

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_2 S}$$

となる。

極板間の電圧は、

$$\mathrm{V} = \mathrm{E_1 d_1} + \mathrm{E_2 d_2} = \frac{Q\mathrm{d}_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{Q\mathrm{d}_2}{\varepsilon_2 S} = Q\left(\frac{\mathrm{d}_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{\mathrm{d}_2}{\varepsilon_2 S}\right)$$

となる。

静電容量 C は、

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{\mathrm{d}_2}{\varepsilon_2 S}} = \frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\mathrm{d}_1 + \varepsilon_1\mathrm{d}_2}$$

となる。

（別解）領域１と領域２の電界の強さをそれぞれE_1、E_2とすると、$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$が成り立つ。これは二重誘電体を垂直に通過する電界の性質である。

極板間の電圧は、

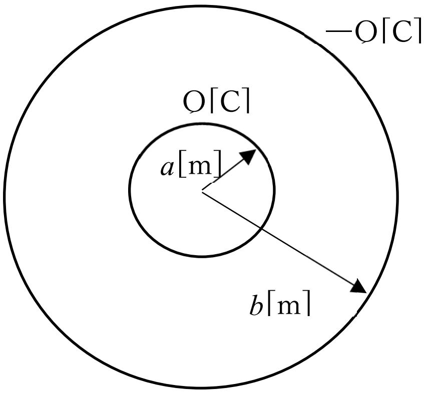
$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_1 d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 d_2$$

より、　$\mathrm{E}_1 = \frac{\varepsilon_2 V}{\varepsilon_2 \mathrm{d}_1 + \varepsilon_1 d_2}$となる。

上部電極の電荷 Q は$\varepsilon_1 \mathrm{E}_1 S$で表されるので、$C = \frac{Q}{V} = \frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\mathrm{d}_1 + \varepsilon_1\mathrm{d}_2}$と求められる。同様の計算より下部電極でも同じ大きさで負の電荷が計算で求められる。

例題 3　二重球殻コンデンサの問題

(1) 内球と外球にそれぞれ電荷 Q と－Q をおいたときに、各部の電界強度を求めよ。空間の誘電率は ε_0 とする。
(2) このときの静電エネルギーの分布を求めよ。
(3) このときの電位の分布を求めよ。
(4) 内球と外球の電位差を求めよ。ただし外球の電位を 0 とする。
(5) 内球と外球を金属電極とみなしたときに、この両極間の静電容量を求めよ。



(1) 内球と外球にそれぞれ電荷 Q と－Q をおいたときに、各部の電界強度を求めよ。空間の誘電率は ε_0 とする。

これはガウスの法則を使えば簡単である。

$r<a$ のとき

$$\int_S E\cdot ndS = 4\pi r^2 E = 0 \qquad \therefore E = 0$$

$a<r<b$ のとき

$$\int_S E\cdot ndS = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$$

$r>b$ のとき

$$\int_S E\cdot ndS = 4\pi r^2 E = \frac{Q-Q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \therefore E = 0$$

(2) このときの静電エネルギーの分布を求めよ。

静電エネルギーの式は$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$で与えられる。

$r<a$ のとき　$U=0$

$a<r<b$ のとき　$U=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$

$r>b$ のとき　$U=0$

(3) このときの電位の分布を求めよ。

電位は電界の線積分の式で求める。

$V=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$ より

$r>b$ のとき　$V=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=0$　この間ゼロである。

$a<r<b$ のとき　$V=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{\infty}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}-\int_{b}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$

$$=-\int_{b}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{b}^{r}\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$$

$r<a$ のとき　$V=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{\infty}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}-\int_{b}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{b}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

(4) 内球と外球の電位差を求めよ。ただし外球の電位を 0 とする。

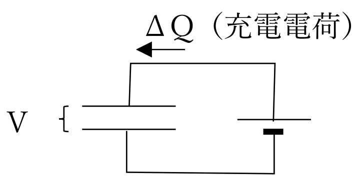
$V=-\int_{b}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ となる.

(5) 内球と外球を金属電極とみなしたときに、この両極間の静電容量を求めよ。

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

となる。

例題 4　コンデンサ容量 C[F]に電圧 E[V]で充電したときに、コンデンサに貯められるエネルギーは $CE^2/2$ であることを示しなさい。



ある時刻にコンデンサの両端の電圧が V [V]であり、これに電荷をΔQ だけ充電することを考える。このときに、コンデンサの極板電荷は Q から Q＋ΔQ だけ増加する。このとき Q＝CV が成り立つ。

ΔQ の電荷を充電することは、電荷ΔQ を無限遠点の 0V から V[V]まで運ぶ仕事をコンデンサに蓄積していることになる。これで増加するコンデンサの内部エネルギーΔU は、次のようになる。

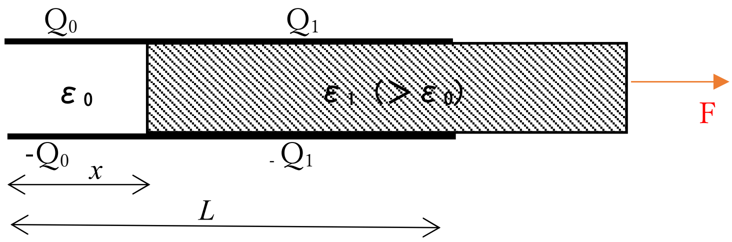
$\Delta U=\Delta QV=\Delta Q\cdot\frac{Q}{C}$

電圧 E のときの極板電荷を $Q_0(=CE)$ とすると、蓄積エネルギーは積分で求められる。

$U=\frac{1}{C}\int_0^{Q_0}QdQ=\frac{Q_0^2}{2C}=\frac{CE^2}{2}$

例題 5　**頻出　仮想変位**

次のような誘電体が横から挿入されたコンデンサがある。このコンデンサには電荷 Q が蓄積されている。横から引き抜くのに必要な力を求めなさい。電極面積は S、電極間距離 d とする。



この問題は誘電体を引き出すときに、距離の増加が Δx のときに、内部エネルギーの増加分 ΔU が求められれば、F=ΔU/Δx から求められる。

この問題は、非誘電体部分の電荷を Q_0 とし、誘電体部分を Q_1 として、極板間の電圧が等しいとして、それぞれを求める。非誘電体部分の容量を C_0、誘電体部分を C_1 とすると、次が成り立つ。

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\cdot\frac{x}{L} \qquad C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d}\cdot\frac{L-x}{L}$$

$Q = Q_0 + Q_1$　電荷の総量が等しい

$\frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q_1}{C_1}$　極板間の電圧は等しい

下二つの連立方程式から、それぞれの電荷を求める。

$$Q_0 = \frac{C_0 Q}{C_0+C_1} = \frac{\varepsilon_0 x}{\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(L-x)}Q \qquad Q_1 = \frac{C_1 Q}{C_0+C_1} = \frac{\varepsilon_1(L-x)}{\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(L-x)}Q$$

非誘電体部分のコンデンサと誘電体部分のコンデンサの蓄積エネルギーの総和 U 次のようになる。

$$U = \frac{Q_0^2}{2C_0} + \frac{Q_1^2}{2C_1} = \frac{dLQ^2}{2S}\left\{\frac{\varepsilon_0 x}{\left(\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(L-x)\right)^2} + \frac{\varepsilon_1(L-x)}{\left(\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(L-x)\right)^2}\right\}$$

$$F = \frac{dU}{dx} = \frac{dQ^2}{2S}\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_1)\left(\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(L-x)\right)^2 - 2(\varepsilon_0-\varepsilon_1)\left(\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(L-x)\right)^2}{\left(\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(L-x)\right)^4}$$

$$= \frac{dLQ^2}{2S}\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{\left(\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(L-x)\right)^2}$$

$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 > 0$ であることにより、力は正である。つまり、引き抜くには力が必要となり、この誘電体自体は内部に引き込まれる力が働いている。

※ミニ解説　この問題で極板間の電圧が一定であるという条件ならどうだろうか。これは外部に電圧源を付けた状態であるが、この場合外部からの仕事 ΔW（＝FΔx）とそのときの内部エネルギーの増加分 ΔU、電圧源から供給されるエネルギーを ΔU_1 として、エネルギー保存の法則 $\Delta W + \Delta U_1 = \Delta U$ から、ΔW を求めて力 F を計算する。計算として複雑になる。参考までに、例題 7 を参照いただきたい。

例題 6　**頻出　仮想変位**
平行平板コンデンサに電荷 Q、-Q で帯電されているとする。このコンデンサの極板面積は S、極板間の距離を x とする。極板間に働く力 F を求めなさい。極板間の誘電率は ε_0とする。

この答えは、クーロンの法則では単純に引力が働くことがわかるが、$Q^2/4\pi\varepsilon_0 x^2$とはならない。これは単純に点電荷条件が当てはまらないからである。外部から電極を力 F で引っ張って、極板間距離をΔxだけ増やしたときに、内部エネルギーの増加をΔU とするとΔU/Δxが引っ張るのに必要な力、すなわち引っ張られている力になる。まずは内部エネルギーU を求めよう。

$$U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2x}{2\varepsilon_0S}$$

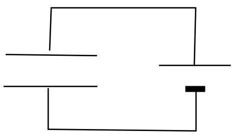
力 F は、

$$F=\frac{dU}{dx}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0S}$$

この式より、力 F は正であり、極板間は引きあっていることになる。

例題 7　**頻出　仮想変位**
平行平板コンデンサに一定電圧 V がかけられている。このコンデンサの極板面積は S、極板間の距離をとする。極板間に働く力 F を求めなさい。極板間誘電率はε_0とする。

←ΔQ（充電電荷）



V

この問題は結論からすると例題 6 と同じ答えになるが、求め方は同じではない。これは上電極を引っ張ると、電池から電荷の出入りがあって、そこでのエネルギーのやり取りがあるからである。

電極間距離を x から $x+\Delta x$ に増加させたとする。
このとき容量 C は$\frac{\varepsilon_0S}{x}$から$\frac{\varepsilon_0S}{x+\Delta x}$となる。また極板電荷は Q=CV の式より、
$\frac{\varepsilon_0S}{x}V$から$\frac{\varepsilon_0S}{x+\Delta x}V$になる。
内部エネルギーの変化ΔU は$\Delta U=\frac{1}{2}(Q+\Delta Q)V-\frac{1}{2}QV$より、

$$\Delta U=\frac{1}{2}V\left(\frac{\varepsilon_0S}{x+\Delta x}V-\frac{\varepsilon_0S}{x}V\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_0SV^2\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

となる。このとき電池が電圧 V コンデンサにΔQ で充電してエネルギーΔU_1だけエネルギーを与えたとする。

$$\Delta U_1=V\Delta Q=\left(\frac{\varepsilon_0S}{x+\Delta x}V-\frac{\varepsilon_0S}{x}V\right)V=\varepsilon_0SV^2\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\Delta W=\Delta U-\Delta U_1=\frac{1}{2}\varepsilon_0SV^2\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}-\varepsilon_0SV^2\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{1}{2}\varepsilon_0SV^2\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$F=\frac{\Delta W}{\Delta x}=\frac{1}{2}\varepsilon_0SV^2\frac{1}{x(x+\Delta x)}\cong\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0SV^2}{x^2}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0S}$$　（答え）

力 F は正であり、この場合も極板間は引きあっていることがわかる。