

## 電磁気学演習 3章 電位と電界の関係

### ポイント

#### 1. 電位と電界の関係

電界とは、1Cの電荷を置いたときに場から受ける力であり、それはベクトルである。電位は1Cの電荷を基点からその場所へ動かすときの仕事であり、基点が定義されていないときは、無限遠点を考える。電界（ベクトル）と電位（スカラー）の関係は次のように表される。

1) 電界から電位を求めるとき

$$V = - \int_{\text{基点}}^{\text{対象点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ は電界ベクトルと積分経路の接線の単位ベクトルの積であり、電界  $\mathbf{E}$  と積分経路の接線が角度  $\theta$  をなす場合は、

$$V = - \int_{\text{基点}}^{\text{対象点}} E \cos\theta dl$$

とスカラーの積分にすることができる。

2) 電位から電界ベクトルを計算するとき

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\nabla V \quad \text{ただし } \text{grad}V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \text{ の偏微分で表される。}$$

$\text{grad}$ はグラディエントと呼ぶ。この式の  $\frac{\partial V}{\partial x}$  は、 $V$  を  $x$  のみを変数として、他の変数は定数として微分するという意味である。

#### 2. 電界があるときに、その場所の電荷密度を求める。

ガウスの法則の微分系を使って求める。単位体積中の電荷（電荷密度）を  $\rho$  とすると、

$$\rho = \epsilon_0 \text{div}\mathbf{E} \quad (\text{ガウスの法則の微分形})$$

であり、 $\epsilon_0$ は空間の誘電率である。 $\text{div}\mathbf{E}$ はダイバージェンス  $\mathbf{E}$  と読み、

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

である。 $E_x$ は電界ベクトル  $\mathbf{E}$  の  $x$  成分である。

例題1 点電荷が作る電界の式から電位を求める問題

原点に電荷  $Q$ [C]を置いたときに、距離  $r$ [m]の位置の電界ベクトルを答えなさい。このときの電位  $V$ を求めなさい。場は真空を仮定し、誘電率は $\epsilon_0$ とする。

点電荷の作る電界の式は、

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

である。電位  $V$ は

$$V = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ともとられる。 $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}$ であるが、 $d\mathbf{r}$ は経路積分の積分要素で、大きさは1、 $\hat{\mathbf{r}}$ とは同じ方向なので、内積をとると1になる。

例題2 点電荷が作る電位の式から電界ベクトルを求める問題

点電荷  $Q$  がつくる距離 $r$ の位置の電位は

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ で表される。}$$

位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおいて、電界  $\mathbf{E}$ を求めよ。

点電荷の作る電界の式が導かれる。

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

を計算すればよい。

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \text{ となる。}$$

したがって、

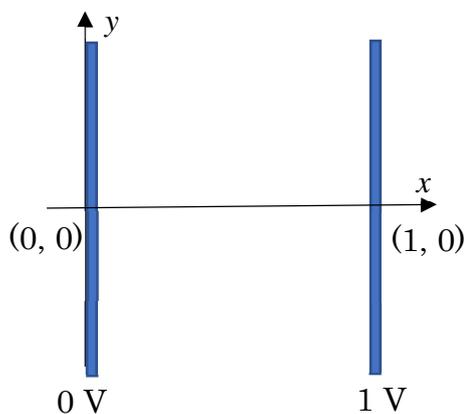
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

と求められ、 $\hat{\mathbf{r}} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$  より、

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \text{ と求められる。}$$

### 例題 3 線積分に慣れる

次のように、距離が 1m 離れた平行平板に図のように電位がかけられている。電界ベクトル  $\mathbf{E}$  は  $(-1, 0, 0)$  で与えられる。線積分を使って右の平板の電位が 1 V になることを確かめなさい。



計算のため図のような  $x$ - $y$  座標を考える。原点から座標  $(1, 0)$  までの線積分を計算する。

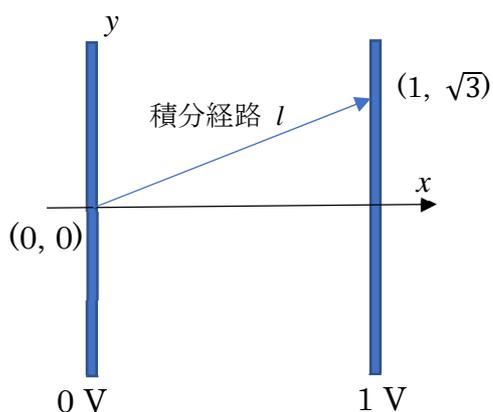
$$V = -\int_0^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$$

積分経路は、 $x$  軸と平行なので、微小積分要素を  $d\mathbf{x}$  とする。太字でベクトルである。 $\cdot$  は内積を表す。内積はなす角度を  $\theta$  とすると、スカラーと  $\cos \theta$  の積になる。

$$V = -\int_0^1 E \cos \theta dx = -\int_0^1 E \cos(180^\circ) dx = \int_0^1 dx = 1 \quad (\text{答え})$$

この式において、電界ベクトルと積分方向が正反対なので、角度は  $180^\circ$  になることに注意する。

例題 4 例題 3 の問題で  $(1, \sqrt{3})$  の位置の電位を計算し、同じ 1 V になることを示しなさい。



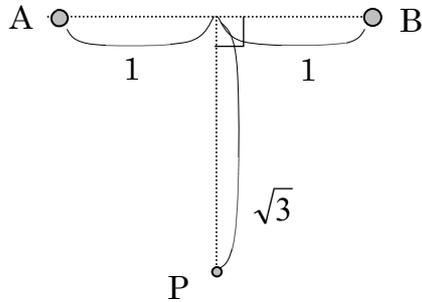
図のように積分経路  $l$  を定める。

積分経路の距離は 2 で、電界ベクトルとなす角度は  $120^\circ$  なので、

$$\begin{aligned} V &= -\int_0^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^2 |\mathbf{E}| \cos \theta dl = \\ &= -\int_0^2 \cos(120^\circ) dl = \frac{1}{2} \int_0^2 dl = 1 \quad (\text{答え}) \end{aligned}$$

※ミニ解説 このように二点間の電位差が等しいときに、どのような積分経路をとっても計算される電位差は同じになる。当たり前の結論だが、あえて練習のために出題した。

例題 5 図のように、点 A に  $Q[C]$ 、点 B に  $2Q[C]$  が  $2[m]$  離れて置かれている。このとき点 P における電位  $V$  を求めよ。



電位は、電荷の大きさと電荷とその場所との距離できまる。AP の距離は 2、BP の距離も 2 である。

P 点の電位は

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0} \quad [V]$$

となる。

例題 6 位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  と表されるとき、その大きさ  $r$  および単位ベクトル  $\hat{\mathbf{r}}$  を求めよ。さらに、このベクトルの発散  $\text{div } \mathbf{r}$  を求めよ。

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  である。

$$\hat{\mathbf{r}} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

となる。  $\text{div } \mathbf{r}$  は

$$\text{div } \mathbf{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}$$

である。これは偏微分といい、 $\frac{\partial r_x}{\partial x}$  は  $x$  以外の変数は定数とみなして、 $r$  の  $x$  成

分を  $x$  で微分とするという意味である。

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial r_y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial r_z}{\partial z} = 1 \text{ より、}$$

$$\text{div } \mathbf{r} = 3$$

例題 7 図のような半径  $a$ [m] の球の表面に均一に電荷が帯電しており、その量は  $Q$ [C] である。このとき、半径  $r$  の位置での電界の強さは、

$$E = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \end{cases}$$

であらうことができる。 $\epsilon_0$  は場（真空）の誘電率である。このときの電位を  $r$  の関数として求めよ。

無限遠点を基点に、経路積分を行えばよい。

$r > a$  では

$$V = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$0 < r < a$  では、

$$V = - \int_a^0 0 dr - \int_{\infty}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

ここで、 $r > a$  と  $0 < r < a$  で電界の関数が変わるので、積分経路を二分割して求めることに注意する。

**※ミニ解説** 電位を電界から計算で求めるときに、必ず電位の基準、すなわち線積分の基点を与える必要がある。この基点は、アースであり、電位  $0$  V の地点である。電磁気学では、この電位の基点が与えられていないときは、暗黙で無限遠点を基点とする。