電磁気学演習　１章　点電荷の作る電界

1. 点電荷の作る電界

点電荷 Q[C]がおかれていて、ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置に作る電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ は次の式で表される。真空の誘電率をε_0とする。

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

ベクトル $\boldsymbol{r}$ は、位置ベクトルと呼ばれ、$\boldsymbol{r} = (a, b, c)$とすると、

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$　　位置ベクトルの距離（長さ）

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$$　　位置ベクトルの単位ベクトル

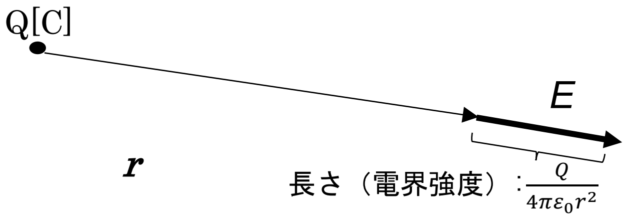
2. 三次元ベクトルの表し方

電磁気学では三次元のベクトルを扱う。括弧の中に x, y, z 成分を羅列する(*a, b, c*)の書き方は、線形代数や数値計算分野で使われる。一方、x, y, z の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を使って、$a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ と表現してもよい。これを ijk 表示ともいう。このほか単位ベクトルを、$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ と表示する例もある。本書では括弧書きでの表示を使う。

3. 点電荷の作る電界を作図としてとらえる。

点電荷のおかれた位置から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の先にできる電界ベクトルを作図するときは、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の先から、$\boldsymbol{r}$ と同じ方向に、長さ$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$の大きさの矢印を書く。

電界の強さ（電界強度）は電界ベクトルの長さを指す。**電界の方向は位置ベクトルの方向**になる。



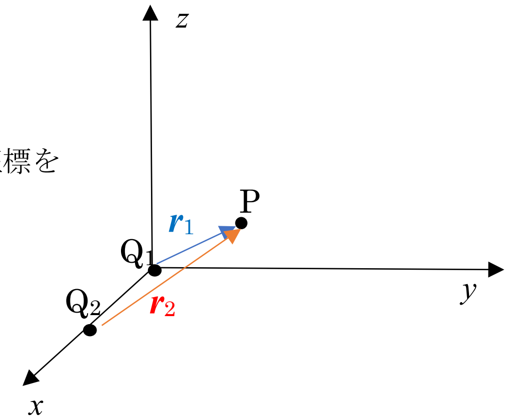
複数の点電荷からの電界ベクトルを書くときに、ベクトルの長さは点電荷の電気量が同じであれば、距離が同じであれば同じにする。距離が二倍になれば、長さは 1/4 とし、距離が半分であれば長さは 2 倍にする。

4. 重ね合わせの原理

複数の点電荷の作る電界を計算するために、個々の点電荷が作る電界をそれぞれ計算し、ベクトルとして足し合わせる。この原理を使うことであらゆる形状の点電荷の作る電界を計算することができる。これは例題を通して学んでいきましょう。

[基本]　例題１　点電荷 Q_1 [C]が原点に、点電荷 Q_2[C]が(2,0,0)の位置にある。点 P（3,3,3）の位置にできる電界をベクトルとして求めなさい。ここで場は真空とし誘電率は ε_0 とする。

Q_1[C]が点 P に作る電界と Q_2[C]が点 P に作る電界をそれぞれ求めて、ベクトルとして足せばよい。



Q_1 の作る電界ベクトル $\mathbf{E}_1$ を求める。

位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ を求める。終点座標から始点座標を引いて求める。

$\boldsymbol{r}_1 = (3,3,3) - (0,0,0) = (3,3,3)$
長さ　$r_1 = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$

$\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

後は式に当てはめて、

$\boldsymbol{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 {r_1}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{Q_1}{108\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

同様に、$\boldsymbol{E}_2$ は
$\boldsymbol{r}_2 = (3,3,3) - (2,0,0) = (1,3,3)$
$r_2 = \sqrt{19}$
より

$\boldsymbol{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 {r_2}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_2 = \frac{Q_2}{76\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}\right)$

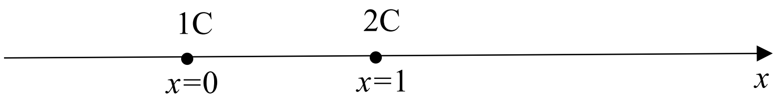
求める電界はそれぞれの電界ベクトルを足し合わせることで求められる。

$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{Q_1}{108\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{Q_2}{76\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}\right)$

となる。

※ミニ解説　ここでの場の誘電率は真空を前提としているが、空気や物質中でも一様であれば、その誘電率を当てはめれば同じ式を使って解くことができる。

[基本]　例題２　x 軸上の２点に電荷がおかれている。１Ｃが x＝0 の位置に、２Ｃ が x＝1 の位置に置かれている。電界の強さが０になる位置の x 座標を求めよ。ここで場は真空とし誘電率は ε_0 とする。



両方の電荷とも正であり、その前後に電界を発する。電界がゼロになるのは、１Ｃが作る電界ベクトルと 2C の作る電界ベクトルが互い違いになる必要があり、その座標は $0 < x < 1$ の範囲である。

仮に、電界がゼロになる座標を t とする。
1C の電荷が座標 t の位置に作る電界の大きさは

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 t^2}$$

となり、方向は右向きである。
1C の電荷が座標 t の位置に作る電界の大きさは

$$\frac{2}{4\pi\varepsilon_0 (1-t)^2}$$

となり、方向は左向きである。これらの大きさが等しいので、

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 t^2} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0 (1-t)^2}$$

$$(1-t)^2 = 2t^2$$

これを解くと、

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

$0 < t < 1$ より、

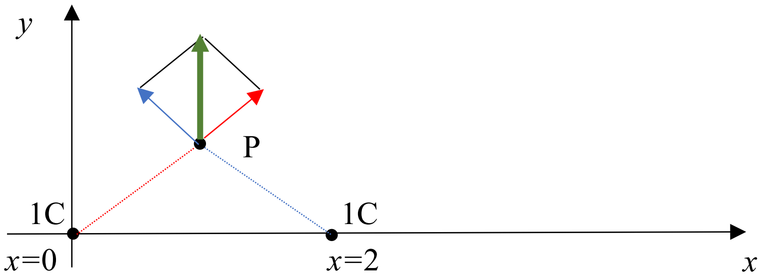
$$t = \frac{-2+\sqrt{4+4}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

となる。$x = -1 + \sqrt{2}$ の位置が電界ゼロになる。

※ミニ解説　例題１ではベクトルを直接計算する方法で求めたが、このように距離と方向が明確に把握できるのであれば、大きさを考慮した作図で解く方が簡単になることもある。うまく使い分けてほしい。

[基本]　例題 3　原点と点（2,0,0）の位置に Q[C]の電荷がおかれている。点 P(1,1,0)の位置における電界ベクトルを図示せよ。ここで場は真空とし誘電率は ε_0 とする。

例題 1 と同じ解き方をしてもよいが、ここは作図で解くことにする。



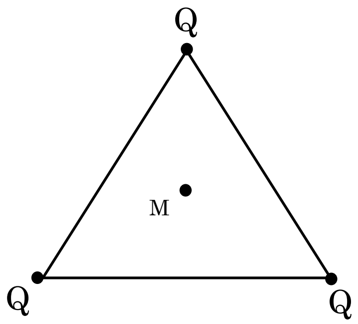
まず、原点の 1C の作る電界ベクトルを作図しよう。

原点と点 P の距離は$\sqrt{2}$であるため、P 点での電界の強さは、

$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}$となる。この大きさの矢印を赤で書く。赤矢印の大きさはここでは適当であるが、$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}$の大きさがあると想定しておく。続いて x=2 での 1C の作る電界の大きさも距離が$\sqrt{2}$であり、$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}$の大きさとなる。これを青矢印で書く。

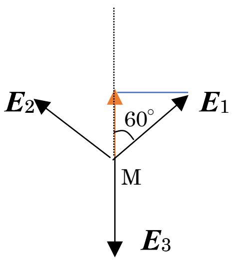
赤矢印と青矢印の合成を緑で表しこれが求める電界ベクトルになるが、この赤・青の矢印の長さは同じで、それらの角度が 90°　であるので、緑矢印は赤・青矢印を辺とする正方形の頂点になるように書く。これが P 点上でできる電界ベクトルであるが、その長さは、正方形の一辺が$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}$であり、その対角線の長さとなり、$\frac{\sqrt{2}}{8\pi\varepsilon_0}$となる。

例題 4　図のように同じ電気量の点電荷が、正三角形の頂点に置かれている。三角形の中心である重心の位置 M での電界強度を求めなさい。ここで場は真空とし誘電率は ε_0 とする。



この問題も作図で考えることにする。重心の位置は頂点から等距離であるので、各頂点の電荷が作る電界ベクトルの長さは同じである。重心 M 周りの、電界ベクトルを下に書いてみる。

例えば左上に伸びるベクトル（$\boldsymbol{E}_1$）は左下の電荷ができる電界ベクトルである。この電界ベクトルは右上に伸びる電界ベクトル（$\boldsymbol{E}_2$）と相殺されて、上方向のみの成分が残る。

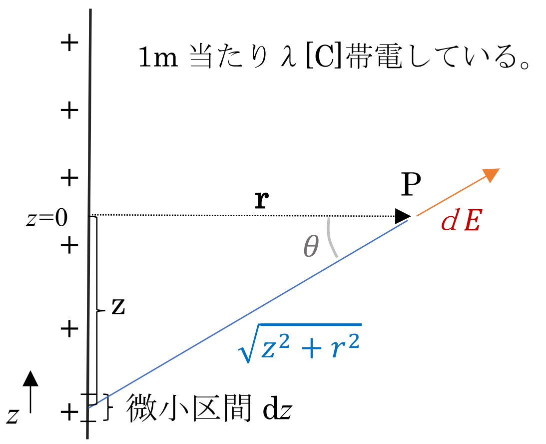


$\boldsymbol{E}_1$ の上方向成分（橙線）はなす角度が 60° であるから $|\boldsymbol{E}_1|\cos 60° = 1/2|\boldsymbol{E}_1|$
と表される。つまり、ベクトル $\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ が合成されると、上方向に $\boldsymbol{E}_1$ 同じ長さの電界ベクトルができることになる。これは同じ長さの $\boldsymbol{E}_3$、すなわち上の電界 Q の作る電界ベクトルと打ち消すことになる。

重心 M での電界の強度はゼロである。

※ミニ解説　これは正三角形の場合だが、正多角形でも頂点に同じ電荷を置いて重心にできる電界は相殺されてゼロになる。この発展で、円（真円）に一様に電荷が帯電している場合も重心となる中心位置では、電界はゼロとなる。

例題 5　線状電荷の作る電界　無限に伸びる線上に電荷がλ[C/m]で帯電しているとする。距離 r[m]離れた位置の電界の大きさを求めよ。ここで場は真空とし誘電率は ε_0 とする。



単位長さ(すなわち 1m)の微小区間 dz の電荷λdz が距離 r[m]離れた位置を P とし、そこで作る電界の大きさを求めてみる。図のような距離関係から

$$dE = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)}$$

となる。電界ベクトル dE は図では右上にあがっているように見えるが、線の全区間分を重ね合わせると、水平方向の分しか残らない。したがって、上式に cosθ をかけて、 z を−∞から∞まで積分することで、点 P の位置の電界ベクトルを求めることができる。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda cos\theta dz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda r dz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{3/2}}$$

上の積分であるが、$z = r\tan\theta$ とすると、$\frac{dz}{d\theta} = r\frac{1}{\cos^2\theta}$となる。

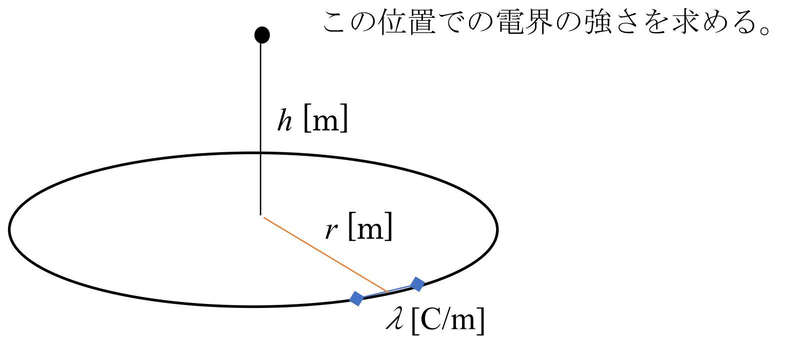
$z^2+r^2 = r^2(1+\tan^2\theta) = r^2/\cos^2\theta$、積分区間は$-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}$より

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda r^2 d\theta\frac{1}{\cos^2\theta}}{4\pi\varepsilon_0 r^3/\cos^3\theta} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}[sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

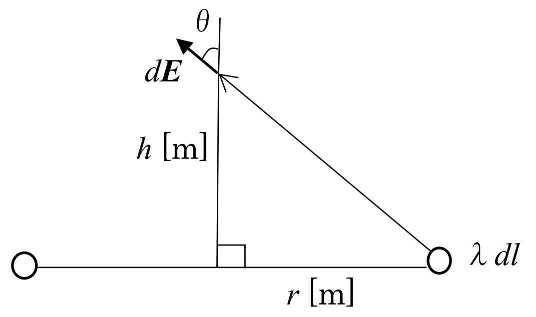
となる。

※ミニ解説　この積分は電磁気学では頻出である。大学学部生であればぜひ習得しておきたいところである。

例題６　円環状電荷の作る電界　図のように半径 r [m]の円環に単位長さ当たり λ [C]で帯電している。中心から、高さ h [m]の位置の電界強度を求めなさい。ここで場は真空とし誘電率は ε_0 とする。



下の図のように断面を考える。



図のように微小区間 dl の電荷 $\lambda\,dl$ が作る電界ベクトル $\boldsymbol{dE}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に対して、同じ方向に向いている。このベクトルは丁度、円環の反対側の微小区間の作る電界ベクトルを考えれば、それと合成すると、上方向のみの成分が残る。つまり、求める電界ベクトルの方向は上方向となる。

したがって、電界ベクトル $\boldsymbol{dE}$ の大きさ$|\boldsymbol{dE}|$は

$$|d\boldsymbol{E}| = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)}$$

となる。この式で$r^2 + h^2$は微小区間と求める位置との距離の２乗である。$\boldsymbol{dE}$ の上方向成分はこれに $\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$をかければよい。全円環の作る電界強度 $\boldsymbol{E}_\perp$ はさらに円周 $2\pi r$ をかければ求められる。

$$\boldsymbol{E}_\perp = \frac{\lambda h r}{2\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}$$

※ミニ解説　点電荷からの電界の計算の拡張で、帯電した領域を微小区間に分けて、積分で解くといたの、前問とこの問題である。複雑な帯電物体からの電界計算をコンピューターで求める場合もこのやり方を使う。