電磁気学基礎　１章　電磁気学で使うベクトル演算

1. 位置ベクトル
   電磁気学では物体の位置を示すのに、位置ベクトルが使われる。位置ベクトルは基準点を$O(x_0, y_0, z_0)$とすると、ベクトルの先$P(x_1, y_1, z_1)$点とするときに、P点の位置ベクトル$\overrightarrow{OP}$は

$$\overrightarrow{OP} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

   で表される。通常位置ベクトルの標記に$\boldsymbol{r}$は、基準の位置が明示されなければ、原点となる。

2. ベクトルの大きさ（長さ）とその単位ベクトル
   ベクトル$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$とするときに、

   ベクトルの大きさ（長さ）$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   単位ベクトル

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

3. ベクトルの ijk 表示
   ベクトルはしばしば次のように表示される。

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \quad 或いは \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}、x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

   ここで$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$はそれぞれ *xyz* 方向の単位ベクトルである。

4. ベクトル加減算
   ベクトルは文字通り線形代数で言われるベクトルあり、次の加算と定数倍に関する性質を持つ。

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z),\ \ \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

$$c\boldsymbol{A} = (cA_x, cA_y, cA_z), \quad c \in R$$（cは実数という意味）

5. ベクトルの内積

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z),\ \ \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB\cos\theta$$

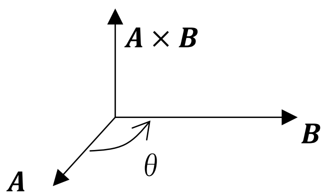
ただし θ はベクトル$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$のなす角度である。ゴシックではない$A, B$はベクトルの長さを表す。

6. ベクトルの外積

外積は次の計算と方向のイメージとして記憶する。

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \boldsymbol{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \boldsymbol{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

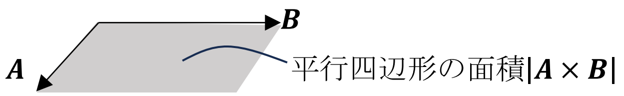
$$= (A_y B_z - A_z B_y,\quad A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x\ )$$



$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$は、$\boldsymbol{A}$ベクトル、$\boldsymbol{B}$ベクトルに対して垂直方向で、$\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{B}$に巻く方向に対して右ネジの方向と覚える。なお大きさについては

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB\sin\theta$$

がなりたつ。つまり$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$は$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ベクトルの作る平行四辺形の面積を表す。



外積の計算において次の性質が成り立つ。

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$　積順序逆はマイナス

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$　同じベクトルの外積は 0

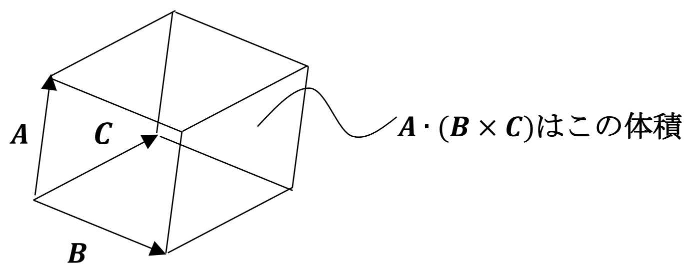
$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$　外積は分配して積、方向に注意

7. スカラーの三重積

ベクトル$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$が同一平面にないときに

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$$

をスカラーの三重積といい、その絶対値はベクトル$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$の作る平行六面体の体積になる。



次の関係がなりたつ。

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

外積されたベクトルが内積と同じ方向であれば、正の値をとり、体積となる。逆の場合は負の数値を取る。

また、

$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$、　$\boldsymbol{C} = (C_x, C_y, C_z)$

となる場合、

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_y \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

となる。

8. ベクトルの微分

あるベクトルがtの関数で表されるときに

$$\boldsymbol{A}(t) = \left(A_x(t), A_y(t), A_z(t)\right)$$

となるときに、

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \left(\frac{dA_x(t)}{dt}, \frac{dA_y(t)}{dt}, \frac{dA_z(t)}{dt}\right)$$

で表される。また、微分には次の性質がある。

$$\frac{ds(t)\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt}\boldsymbol{A}(t) + s(t)\frac{dA(t)}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\{\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)\}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\times\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\times\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}$$

9. スカラーの勾配 grad

スカラー関数φが位置座標x, y, zの関数であるときに、

$$grad\ \varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

は勾配と呼ばれる。$grad$はグラディエント、∇はナブラとよぶ。

$$\varphi(x, y, z) = c \quad \text{但し}c\text{定数}$$

であるときに、これは曲面あるいは平面を表しており、$grad\ \varphi$はその点の等位面での法線方向を表し、大きさは傾きを表す。

10. ベクトルの発散

ベクトル　$\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$を仮定するときに、

$$div\ \boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

で、divをダイバージェンスといい、発散を意味する。

11. スカラーのラプラシアン

ベクトル　$\varphi(x, y, z)$を仮定するときに、

$$div\ grad\ \varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

これをラプラシアンという。

12. ベクトルの回転

ベクトル　$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$を仮定するときに、

$$rot\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{d\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

これを回転、ローテーションという。

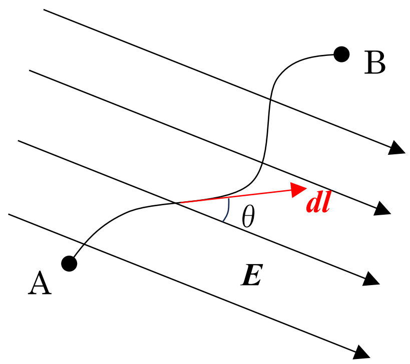
特に電磁気学においては次の微分に関する変換公式を覚えておきたい。

勾配の回転は 0　$rot\ grad\ \boldsymbol{A} = 0$

回転の回転　$rot\ rot\ \boldsymbol{A} = grad\ div\ \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

13. 線積分

あるベクトル場（ここでは $\boldsymbol{E}$ とする）があるときに、線分 AB に沿ってその方向成分で積分する計算を線積分という。積分要素は線に沿った長さ 1 のベクトルであらわされ、ここでは $\boldsymbol{dl}$ で表記すると、線積分は次のように書かれる。



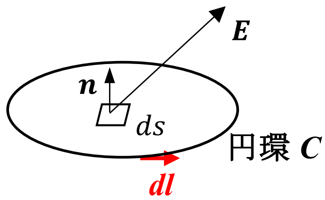
$$\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = \int_A^B E \cos\theta\, dl$$

ベクトルと積分要素と積分されるベクトル$\boldsymbol{E}$との角度が θ であるときに、ベクトル$\boldsymbol{E}$の長さと$\cos\theta$の積の積分で求められる。

14. ストークスの定理

円環にそってベクトルの線積分を取るときに、円環内のベクトルの回転の面積積分に書き換えられる。

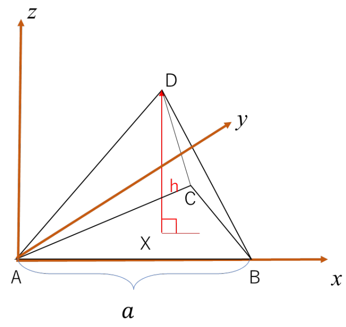
$$\int_C \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = \int_{円環C内} rot\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} ds$$



$\boldsymbol{n}$は円環内の微小面積$\boldsymbol{ds}$の単位法線ベクトルである。

練習問題１　一辺の長さがaの正四面体の高さを求めなさい。

正四面体を右図のように xyz 座標にあわせてみる。



ここで各座標は次のようにあらわされる。

$$A=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}a\\0\end{pmatrix}$$

ここで、頂点の D から底面に垂線を下した位置を X とすると、X は底面三角形の重心になる。重心の公式をつかって、X 点は次のように求められる。

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{6}a\\0\end{pmatrix}$$

高さを h とすると、D 点は

$$D=\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{6}a\\h\end{pmatrix}$$

である。ここで$\overrightarrow{AD}$は

$$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{6}a\\h\end{pmatrix}$$

となり、その長さはaとなるので、

$$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2+h^2}=a^2$$

これを解くと、$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$と求められる。