高校数学の復習

場合の数・確率

確率を考えるための基礎として、場合の数と確率について勉強してきましょう。

場合の数

1.順列の総数

異なる n 個から異なる r 個を選ぶ場合の数

$$ {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{個}} $$

2.円環順列

異なる n 個から異なる r 個を選んで円状に並べた場合の数

${}_nP_r$を選んだ個数 r で割ればよい。

3.同じものを含む順列

n 個のものに同じものが、r 個、s 個、t 個・・と含まれているときの、n 個の並べ方の数

$$ \frac{n!}{r!\cdot s!\cdot t!\cdots} $$

(例題)

6 個のくじがあり、○が 3 個、△が 2 個、×が 1 個あるときに、順にとって全部並べたときにのきの場合の数

$$ \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1\times1} = 60\text{通り} $$

4.組み合わせの場合の数

異なる n 個から異なる r 個を選ぶ組み合わせの数

$$ {}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

この組合わせの記号ですが、つぎの式の性質も覚えておきましょう。

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_{n-r} $$

n 個中 r 個を選ぶ組み合せはそれと同じ数だけの残ったものの組み合わせがあるということですね。

確率の計算

1.　確率の計算

ある事象 A がおきる場合の数を $n(A)$、全体の事象 U がおきる場合の数を $n(U)$ とすると、事象 A が起きる確率 P(A)

$$ P(A) = \frac{\text{A が起きる場合の数}}{\text{全体の場合の数}} = \frac{n(A)}{n(U)} $$

例　○、△、□、×のカードが 4 枚あるときに、1 枚引いて○である確率

全体 4 通りのなかで、○は 1 通りなので、確率は 1/4 になる。

$$ P = \frac{1}{4} $$

2. 確率の性質

○100%起こる事象の確率は 1 であり、絶対に起きえない場合の確率は 0 である。つまり確率は 0 から 1 の範囲である。

○余事象の確率　事象 A がおきる確率を$P(A)$とすると、それが起きない確率$P(\bar{A})$

$$ P(\bar{A}) = 1 - P(A) $$

○**事象 A と事象 B が独立事象**であるとき、A と B が同時に起きる確率$P(A \cap B)$

$$ P(A \cap B) = P(A) \times P(B) $$

○事象 A と事象 B が独立事象であるとき、A と B のどちらか、あるいは両方が起きる確率$P(A \cup B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

A と B が同時に起きる場合の重複分を減算

〇条件確率　A という事象がおこることが分かって、事象 B が起きる確率$P(B\mid A)$

$P(B\mid A)=\frac{A\text{と}B\text{が同時に起きる確率}}{A\text{が起きる確率}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$\boxed{\text{例題}}$　**令和 3 年共通テスト追試験数 1A 題 3 問より**

二つに袋 A（赤玉 2、白玉 1）と袋 B（赤玉 3、白玉 1）と空箱がある。

(1)A,B から 1 個ずつ取り出し箱に入れる。少なくとも 1 個が赤の確率？

場合	確率	
袋 A　赤　袋 B　白	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$	袋 A から赤を取る確率は 2/3、袋 B から白は 1/4
袋 A　白　袋 B　赤	$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$	袋 A から白を取る確率は 1/3、袋 B から赤は 3/4
袋 A　赤　袋 B　赤	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$	袋 A から赤を取る確率は 2/3、袋 B から赤は 3/4

全体の確率は$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{11}{12}$

別のやり方として、２個とも白である場合の余事象と考える。

場合	確率
袋 A　白　袋 B　白	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

求める確率は$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

(2)箱から無作為に 1 個取り出した時の赤の確率?

箱の中が赤と白の場合

その確率は$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$であり、

そこで赤を引く確率は 1/2 なので$\frac{5}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$

箱の中が赤２個の場合

その確率は$\frac{1}{2}$で、そのとき必ず赤をひくので、確率は$\frac{1}{2}$

求める確率は

$$\frac{5}{24}+\frac{1}{2}=\frac{17}{24}$$

(3) (2)の条件の時に赤は袋Bからのもであっときの確率?

最終的に1個を取り出すわけだが、袋Bから赤を1個引く確率はA,B合わせて7個から3個をひくので確率3/7である。条件確率と考え P(赤は袋Bから｜赤を引く確率)を求める。

P(赤を引く確率)= $\frac{17}{24}$

袋A 白 袋B 赤 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ $\times\frac{1}{2}$は白赤から赤を引く確率

袋A 赤 袋B 赤 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{2}$は赤が袋Bからの確率

よって

P(赤は袋Bから｜赤を引く確率) $= \dfrac{\text{P(赤は袋 B)}}{\text{P(箱から赤を引く)}}=\dfrac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}{\frac{17}{24}}=\dfrac{9}{17}$

(3)A,Bから2個ずつ取り出すときに、箱の中がちょうど赤二つになる確率？

袋A 赤白 袋B 赤白 $\dfrac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{2}{\frac{3\times2}{2\times1}}\times\dfrac{3\times1}{\frac{4\times3}{2\times1}}=\dfrac{1}{3}$

袋Aでは3個中2個選ぶ組あわせが全事象であり、赤2個から1つ選ぶ組あわせと城個から1個選ぶ組み合わせの積が対象の事象と考える。

袋Bでは4個中2個選ぶ組あわせが全事象であり、赤3個から1つ選ぶ組あわせと城個から1個選ぶ組み合わせの積が対象の事象と考える。

(4) A,Bから2個ずつ取り出すときに、箱の中がちょうど赤三つになる確率？

袋A 赤赤 袋B 赤白 $\dfrac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{\frac{3\times2}{2\times1}}\times\dfrac{3\times1}{\frac{4\times3}{2\times1}}=\dfrac{1}{6}$

袋A 赤白 袋B 赤赤 $\dfrac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{2}{\frac{3\times2}{2\times1}}\times\dfrac{\frac{3\times1}{2\times1}}{\frac{4\times3}{2\times1}}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}$

この二つの確率を足して1/2となる。

(5)（4）のときに、箱から 2 個取り出すときに赤玉 2 個となる確率？

袋 A　赤白　　袋 B　赤白　　$\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\frac{4\times3}{2\times1}}=\frac{1}{18}$

袋 A　赤赤　　袋 B　赤白　　$\frac{1}{6}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}\times\frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{4\times3}{2\times1}}=\frac{1}{12}$

袋 A　赤白　　袋 B　赤赤　　$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{4\times3}{2\times1}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

袋 A　赤赤　　袋 B　赤赤　　$\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{\frac{4\times3}{2\times1}}=\frac{1}{6}$ この場合は 100%赤 2 個

全確率の総和は$\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2+3+12}{36}=\frac{17}{36}$

(6)（5）のときに 1 個のみ B の袋のものが入っている確率

袋 A　赤白　　袋 B　赤白　　$\frac{1}{18}$　必ず袋 B から 1 個入っている。

袋 A　赤赤　　袋 B　赤白　　$\frac{1}{12}\times\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}=\frac{1}{12}\times\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}=\frac{1}{12}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3\times2}{2\times1}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

袋 A　赤白　　袋 B　赤赤　　$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}=\frac{1}{36}$

袋 A　赤赤　　袋 B　赤赤　　$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}\times\frac{2\times2}{\frac{4\times3}{2\times1}}=\frac{1}{9}$ この場合は 100%赤 2 個

全確率の総和は　$\frac{1}{18}+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}=\frac{2+9+1+4}{36}=\frac{16}{36}$

（5）の条件が成立した前提での確率は、(5)の確率で割ればよい。

$\frac{16}{36}\div\frac{17}{36}=\frac{16}{17}$