高校数学の復習 14　三角関数の加法定理・積和公式

1. 次の三角関数の計算をしなさい。

$\sin(x + y)$

$\cos(x + y)$

2. 次の三角関数の計算をしなさい。

$\sin x \cdot \cos y$

$\sin x \cdot \sin y$

$\cos x \cdot \cos y$

3. 次の三角関数の計算をしなさい。

$\sin 15°$

$\sin 75°$

解説

1.　数学の加法定理ですが、これを忘れた方は次の二次元の回転の行列で計算できます。

$$\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos y\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos x\cos y - \mathrm{sin}x\mathrm{sin}y & -\mathrm{sin}x\mathrm{cos}y - \mathrm{cos}x\sin y\\ \mathrm{sin}x\mathrm{cos}y + \mathrm{cos}x\sin y & \cos x\cos y - \mathrm{sin}x\mathrm{sin}y\end{pmatrix}$$

この計算は、原点を中心に点を角度$(x+y)$回転させることは、角度xだけ回転して、その後、角度y回転するということと同じであることを意味します。

加法定理　　これは最低限覚えてください。

$\sin(x\pm y) = \mathrm{sin}x\mathrm{cos}y \pm \mathrm{cos}x\sin y$　　　（複合同順）

サ　コ　　コ　サ

$\cos(\,x\pm y) = \cos x\cos y \mp \mathrm{sin}x\mathrm{sin}y$　　　（複合同順）

コ　コ　　サ　サ

引き算は、$\cos(-y\,) = \cos\ y$ 、 $\sin(-y) = -\sin y$を使えば簡単に求められます。

2.

積和公式　加法定理から導けます。

$$\sin x\ \cdot\cos y \quad = \frac{1}{2}(\mathrm{sin}x\mathrm{cos}y + \mathrm{cos}x\sin y)$$

$$+\frac{1}{2}(\mathrm{sin}x\mathrm{cos}y - \mathrm{cos}x\sin y)$$

$$= \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$$

$$\sin x\ \cdot\sin y \ = \frac{1}{2}(\cos x\cos y + \mathrm{sin}x\mathrm{sin}y)$$

$$+\frac{1}{2}(\cos x\cos y - \mathrm{sin}x\mathrm{sin}y)$$

$$= \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ \frac{1}{2}(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

$$= \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

3. 倍角公式　こちらは加法定理から求めることができます。

$$\sin 2x = \sin x \cos x + \cos x \sin y = 2\sin x \cos y$$

※この式は交流電力を求めるときに使います。

$$\cos 2x = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 1 + 2\cos^2 x$$

４．３倍角の公式

覚え方

$\sin 3\theta = 3sin\theta - 4\sin^3\theta$　サンサイン　サンシ引いて司祭参上

$cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3cos\theta$　サンコス　シコス三乗引いてサンコス

4. 覚えておきたい特殊な角度の三角関数。

前提として、次の美しい角度の三角関数の角度を覚えておきましょう。

$$\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 60° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \sin 45° = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin 60° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

この与式は加法定理等を使って求めていきます。

$$\sin 15° = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4} cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{4} sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 75° = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

これも特殊ですが、

① $\cos 18^\circ = cos\frac{\pi}{10}$の求め方

なんだかんだと言ってπの 1/10 とか 1/5 とかの sin、cos はうまく二倍角や三倍角の公式を使うことで求めることができます。

$\frac{\pi}{10} = \theta$とします。

$sin2\theta$を考えます。

$sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$

$sin2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos(-3\theta) - \cos\frac{\pi}{2}sin3\theta = \cos(3\theta) = 4cos^3\theta - 3cos\theta$

$2sin\theta cos\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$

二倍角と三倍角の公式をつかって sin または cos の高次方程式を作ります。

$2sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 4(1 - \sin^2\theta) - 3 = 1 - 4\sin^3\theta$　両辺を 2 乗する。

$4\sin^3\theta + 2sin\theta - 1 = 0$

$sin\theta = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot4}}{2\cdot4} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$　となるが、θが 18°となると、sin θは正であることは

明確なので $sin\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$となる。

$cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$　(答え)

② $\sin 36^\circ = sin\frac{\pi}{5}$の求め方

$\frac{\pi}{5} = \theta$とおく。

$5\theta = \pi$

2θ＝π-3θ　少しトリッキーですが、

$sin2\theta = \sin(\pi - 3\theta)$

$2sin\theta cos\theta = sin\pi cos3\theta - cos\pi sin3\theta = sin3\theta = 3sin\theta - 4\sin^3\theta$

$2cos\theta = 3 - 4\sin^2\theta = 3 - 4(1-\cos^2\theta) = -1 + 4\cos^2\theta$

$4\cos^2\theta - 2cos\theta - 1 = 0$

$cos\theta = \frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot4}}{2\cdot4} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$　だが、cos θ >0 より、$cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$　(答え)

このほか三角関数には次の公式があります。

和積公式　　あまり使うことはありませんが、積和公式から求められます。

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

半角公式

倍角公式より

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

の関係を使います。

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

以上に示すように、三角関数の公式は覚えておいた方がよいですが、度忘れすることもあります。その時にはいつでも加法定理から確認することができます。