高校数学の復習 13　合同式の応用

合同式は単純に割り算をしたときの余りを計算するだけではなく、整数方程式の解の推定や整数多項式の性質を調べたりするのに活用できます。いくつか例題を示しますので、練習していきましょう。

例題　合同式を使って、整数方程式を求めていきましょう。x と y は整数とします。

$$17x-19y=95$$

この問題も x と y に当てはまる整数が思いつけば簡単ですが、そうでない場合はユークリッドの互除法を使うという手もあります。しかし、ここは合同式を使いましょう。変数の係数が 17 と 19 ですが、小さいほうで mod17 を考えてみましょう。

$-19y\equiv 95$　mod 17

まず、95 は 17 で割ると 10 余ります。

$-19y\equiv 10$　mod 17

一方、$2\times 17y\equiv 0$を足すと、

$15y\equiv 10$　mod 17

これを 17y≡ 0を引き算すると

$-2y\equiv 10$　mod 17

両辺をー して、17 を足しますと

$2y\equiv 7$　mod 17

右辺に 17 を足します。

$2y\equiv 24$　mod 17

両辺を 2 で割りたいですが、17 とは互いに素であるので、割ることができます。

$y\equiv 12$　mod 17

以上のやりくりは慣れれば簡単です。整数 y は 17 で割って 12 余りますから、

$y=17k+12$　k は整数

となります。これを与式に代入すると

$17x-19(17k+12)=95$

これを解きます。きれいに整数の形になります。

$x=19k+19$

と求められます。検算してみましょう。$k=0$ とすると

$(x,y)=(19,12)$

になりますが、与式に代入すると 17×19-19×12＝95 と成り立つことが分かります。

練習問題１　次の整数方程式を解きなさい。変数はすべて整数とします。

（1） $23x + 12y = 233$　　　（2）$93x + 113y = 1814$

解答

(1) mod 12 で与式を考えます。

$23x \equiv 233$

240 は 12 の倍数ですから、

$23x \equiv 233 - 240 \equiv -7 \equiv 5$

$24x \equiv 0$

片々引き算すると、

$x \equiv -5$

右辺に 12 をたして、

$x \equiv 7$

ここで k を整数として$x = 12k + 7$とします。与式に代入して

$y = -23k + 6$

と求められます。

$(x, y) = (12k + 7, -23k + 6)$　ただし k は整数

となります。

(2)　mod 93　で与式を考えます。

$113y \equiv 1814$

$113y \equiv 47$　(1814/93=19 余り 47)

両辺から$93y \equiv 0$を引き算します。

$20y \equiv 47$

両辺 9 倍します。

$180y \equiv 423$

$2 \times 93y \equiv 186y \equiv 0$

両辺引き算します。

$-6y \equiv 423$

両辺を 3 で割れますが、3 と 93 は互いに素ではありません。このようなときには、次のように行います。

$-6y - 423 \equiv -3(2y + 141) \equiv 0$　mod 93

左辺は 3 で割り切れて、93 でも割り切れますから、$(y + 141)$は 93÷3=31 で 31 で割り切れるということになります。

$2y + 141 \equiv 0$　mod 31（法が変わります。）
つまり、
$2y \equiv -141$　mod 31
右辺に 31 の 5 倍の 155 を足します。
$2y \equiv 14$
2 と 31 は互いに素なので、
$y \equiv 7$
となる。つまり k を整数としたときに、
$y = 31k + 7$
となり、与式に代入すると、

$$x = \frac{113}{3}k + 11$$

となります。ここで、xは整数であるため、k は 3 の倍数である必要があります。
$k = 3n$　nは整数
とすると、
$(x, y) = (113n + 11, 93n + 7)$
となります。

練習問題 2　n を整数としたときに、次の多項式は 6 で割り切れることを示しなさい。

$$n^3 + 3n^2 + 2n$$

こちらは、因数分解すると$n(n+1)(n+2)$となり、**連続する三整数の積になります。この中には必ず偶数つまり２の倍数が入りますし、３の倍数も入りますので、必ず 6 で割り切れます**。これを合同式でしめしましょう。

mod 6 を考えます。
n≡0 の場合
$n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 0$
n≡1 の場合
$n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \equiv 6 \equiv 0$
n≡2 の場合
$n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \equiv 24 \equiv 0$
n≡3 の場合

$n^3+3n^2+2n \equiv 3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3 \equiv 60 \equiv 0$

n≡4 の場合　このまま 4 を入れて計算しても 0 になりますが、代わりに−2 を入れて計算します。

$n^3+3n^2+2n \equiv (-2)^3+3\cdot(-2)^2+2\cdot(-2) \equiv 0$

n≡5 の場合 これも−1 を入れて計算してみます。

$n^3+3n^2+2n \equiv (-1)^3+3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1) \equiv 0$

いずれも与式の合同式は 0 となり、6 で割り切れることが証明されました。

練習問題 3

13 で割ると 7 余り、19 で割ると 12 余る整数を一般式の形で求めなさい。

一般的な求め方は、求める整数を n とすると

$n = 13k+7 = 19l+12 \quad k, l$ は整数

とおいて、整数方程式$13k+19l=5$として、求めるのが常道でしょう。

ここは別のやり方を紹介します。

$n = 13k+7$　とおいて、mod 19 をとります。

n≡$13k+7 \equiv 12$ (mod 19)

$13k \equiv 5$　(mod 19)

$19k \equiv 0$より辺々引き算して

$6k \equiv -5$　(mod 19)

右辺に 19 を引いても結果は変わらないので

$6k \equiv -24$　(mod 19)

となる。両辺は 6 で割り切れるが、19 と 6 は互いに素なので、割ることができる。

$k \equiv -4 \equiv 15$　(mod 19)

つまり、m を整数とすると、$k \equiv 19m+15$として、元の式に代入すると、

$n = 13k+7 = 13(19m+15)+7 = 247m+202$

と求められる。もし、m＝1 のとき、n は 449 になるが、13 で割ると 7 余り、19 で割ると 12 余る。m＝2 のとき、n は 696 になるが、これも 13 で割ると 7 余り、19 で割ると 12 余る。

さあいかがでしたか。

合同式は様々整数問題を解くのに有力なツールとして使うことができます。ぜひ、高校時代に学ぶ機会がなかった方もこの際しっかりマスターいたしましょう。