電磁気学演習　10 章 電磁波と波動方程式

1. 電磁界の波動方程式

空気あるいは真空中において、電界および磁場の振動があるとで、電磁波として波の伝搬を起きる。電磁波は波長によって呼称が異なるが、光も X 線も電磁波である。電磁波は波の式で記述できる。仮に z 軸方向に進む波である時刻 t での波の磁場の振幅 $B(z, t)$ と電界の振幅 $E(z, t)$ は次のように書くことができる。

電界の波の式　$E(z,t) = E_0 \sin(\omega t - kz)$

磁場の波の式　$B(z,t) = B_0 \sin(\omega t - kz)$

この式でE_0とB_0は、電界、磁場の振幅（最大値）である。k は**波数**といい、2π[m]中の波の数で、2π/λ で表される。ω は**角周波数**で $2\pi f$（f は周波数）である。電界も磁場はベクトルで記載されるが、一つの電磁波において、ベクトル E と B は直交する。

この波の式を満たす方程式を波動方程式といい、次のように表すことができる。

電界の波動方程式　$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{d^2\boldsymbol{E}}{dt^2} = 0$

磁場の波動方程式　$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu\varepsilon \frac{d^2\boldsymbol{B}}{dt^2} = 0$

これらの式の導出は、マクスウェル方程式から導くことができる。

2. 電磁波の速度（光速）

波の式を波動方程式に代入すると、

$c = f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$　（光速の導出の式）

と求められ、こちらは波の速度 c であり、光速になる。

3. 電磁波の特性インピーダンス

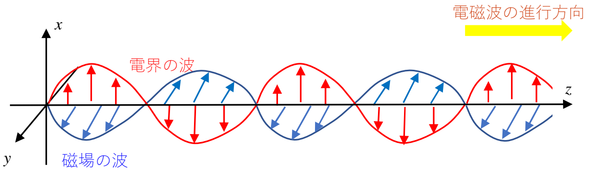
電磁波の伝搬を考えるときに、波の式を波動方程式に代入すると、電界の振幅と電場（磁束密度）の比が求められ、$E_0/B_0 = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$となる。電磁波の特性インピーダンス Z は、磁界と電界の振幅比を特性インピーダンスといい、

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

となる。この特性インピーダンスは波の反射を議論するときに活用する。

3. 波の伝搬のイメージ

電界の波が x 方向に振幅をもち、 z 軸方向に進行するときに、磁場は B の直交する y 軸の方向に振幅を持つ。



例題１　**頻出**　マクスウェル方程式から出発して、電界の波動方程式を求めなさい。

空間において、空気あるいは真空を仮定し、電流が存在しないとする。
電磁誘導の式から出発する。

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

この両辺のrotをとります。

$$rot\,rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\,rot\boldsymbol{B}}{dt}$$

左辺はベクトル演算の公式をつかって

$$rot\,rot\boldsymbol{E} = grad\,div\boldsymbol{E} - divgrad\,\boldsymbol{E} = grad\,div\boldsymbol{E} - \nabla^2\,\boldsymbol{E}$$

となる。ここで$div\boldsymbol{E} = 0$より

$$rot\,rot\boldsymbol{E} = -\nabla^2\,\boldsymbol{E} = -\frac{d\,rot\boldsymbol{B}}{dt}$$

また右辺の$rot\boldsymbol{B}$は、アンペールの式$rot\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$より、$\boldsymbol{J}$＝0 となるため

$rot\boldsymbol{B} = \mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$になる。したがって、

$$-\nabla^2\,\boldsymbol{E} = -\mu\varepsilon\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dt^2}$$

これで電界の波動方程式が求められる。

$$\nabla^2\,\boldsymbol{E} - \mu\varepsilon\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dt^2} = 0$$

例題２　**頻出**　マクスウェル方程式から出発して、磁場の波動方程式を求めなさい。

アンペールの式$rot\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$から出発する。空間に電流はないという仮定から、

$\boldsymbol{J}$＝0 である。

$$rot\boldsymbol{B} = \mu\varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}$$

となる。この両辺のrotをとる。

$$rot\,rot\boldsymbol{B} = \mu\varepsilon\frac{drot\boldsymbol{E}}{dt}$$

左辺はベクトル演算の公式をつかって

$$rot\,rot\boldsymbol{B} = grad\,div\boldsymbol{B} - divgrad\,\boldsymbol{B} = grad\,div\boldsymbol{B} - \nabla^2\,\boldsymbol{B}$$

となる。$div\boldsymbol{B} = 0$であるから、

$-\nabla^2 \boldsymbol{B} = \mu\varepsilon \frac{drot\boldsymbol{E}}{dt}$

$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$　より

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu\varepsilon \frac{d^2\boldsymbol{B}}{dt^2} = 0$$

これが磁場の波動方程式である。

例題３　電界の波の式として$\mathbf{E} = (\ \mathrm{A}\sin(kz - \omega t),\ 0,\ 0)$を仮定して、電界の波動方程式から光速 c を求めなさい。

電界の波動方程式は、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{d^2\boldsymbol{E}}{dt^2} = 0$$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である。

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(E_x, E_y, E_z) = \mu\varepsilon \frac{d^2}{dt^2}(E_x, E_y, E_z)$$

$\mathbf{E} = (\ \mathrm{A}\sin(kz - \omega t),\ 0,\ 0)$より、$x$ 成分のみを取り出すと

スカラー方程式 $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{d^2 E_x}{dt^2} = 0$　となる。

この式にE_x＝$A\sin(kz - \omega t)$を代入する。

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -Ak^2 \sin(kz - \omega t)$$

$$\mu\varepsilon \frac{d^2 E_x}{dt^2} = -\mu\varepsilon\omega^2 \mathrm{A}\sin(kz - \omega t)$$

これを波動方程式に代入すると、

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

の関係がでてくる。

波数　$k = \frac{2\pi}{\lambda}$　　角周波数　$\omega = 2\pi f$

から、　$f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$　（光速の式）

ともとめられる。$f\lambda$はc(光速)である。

例題４　電界ベクトル$\boldsymbol{E} = (E_0 sin(kz - \omega t), 0,0\ )$として、磁束密度の振幅を求めなさい。

$rot\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$ を使う。

$$rot\boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 sin(kz-\omega t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial z}E_0 sin(kz-\omega t) - \ k\frac{\partial}{\partial y}E_0 sin(kz-\omega t)$$

となる。 $k\frac{\partial}{\partial y}E_0 sin(kz-\omega t)$はゼロであるため、

$$rot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial z}E_0 sin(kz-\omega t) = \boldsymbol{j}kE_0 cos(kz-\omega t) = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

となる。

$$\mathrm{B} = \boldsymbol{j}\frac{kE_0}{\omega}sin(kz-\omega t) = \boldsymbol{j}E_0\sqrt{\varepsilon\mu}\,sin(kz-\omega t)$$

となる。つまり、磁束密度の振幅は y 方向でE_0の$\sqrt{\varepsilon\mu}$倍の大きさとなる。

例題 5　物質中を伝搬する電磁波は、真空中に比べて伝搬速度は低下する。物質中の伝搬速度を v、真空中の伝搬速度を c としたときに、物質の屈折率 n (= c / v)は比誘電率のルートで表されることを示しなさい。

屈折率 n は、その物質中を伝搬する光の速度を v、真空中の光速を c としたきに、

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

ε は物資中の誘電率、μ は物質中の透磁率
ε_0は真空中の誘電率、μ_0は真空中の透磁率

となる。仮に、磁性がない材料の場合は、透磁率はほぼ真空の透磁率に等しい。
このときに、

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_s}$$

となり、屈折率は比誘電率ε_sの√になる。

例題 6 電磁波はその波長、すなわち周波数によって呼称が変わる。主な電磁波の名前と、波長範囲、さらにその応用例について述べなさい。

呼び名	波長範囲	応用
長波	1~10 km	船舶無線
中波	100~1000 m	AM 放送
短波	10~100 m	放送、無線
VHF	1~10 m	FM 放送　テレビ放送
UHF	0.1~1 m	FM 放送　テレビ放送　携帯電話
マイクロ波	1~10 cm	電子レンジ　レーダー
ミリ波	1~10 mm	電波天文学　レーダー

赤外線	1~100 μm	ヒーター
可視光	0.38~0.83 μm	人間の視覚
紫外線	0.1~0.38 μm	日焼け、半導体製造、表面処理、殺菌
X 線	0.001~10 nm	レントゲン、X 線回折
Γ 線	10 nm～10 pm	放射線治療、天文観測

例題 7　電磁波として、一つの光線が輸送する単位時間、単位面積当たりのエネルギーPは、$\mathrm{P}=\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}B^2/\mu\right)c$で表されることを示しなさい。

単位体積当たりの電界のエネルギーは$\frac{1}{2}\varepsilon E^2$であり、磁束密度を B としたときに磁場の単位体積当たりのエネルギーは$\frac{1}{2}B^2/\mu$であり、これが光速で輸送されるため、両者の光速倍が単位時間、単位面積当たりのエネルギーとなる。