

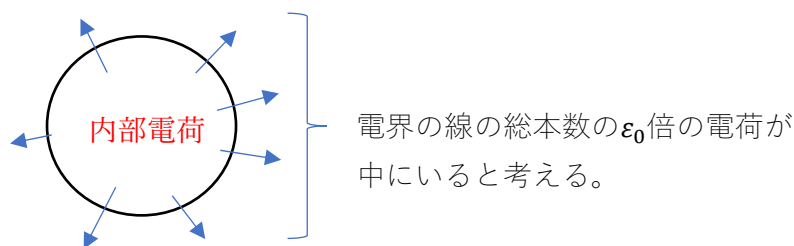
電磁気学演習 4章 ガウスの式を用いた静電界計算

ポイント

1. ガウスの式を使った電界の計算

電荷が発する電界の計算法として、電界の分布する形状を細かく点として分割し、分割した点を点電荷として、求めたい場所における点電荷の作る電界を求め、全分割点の作る電界ベクトルの総和を求める方法がある。この方法は万能であるが、机上計算には向かない。一方、電荷の分布が、球体、筒状、平面状であれば、電界放射の対称性から、ガウスの式を使って簡単にその強度を求めることができる。

ガウスの式の基本的な考えは、場の誘電率を ϵ_0 とすると、1Cの電荷から $1/\epsilon_0$ 本の電界の線が出ていると考える。 1 m^2 を通過する電界の線の本数を電界強度とする。閉曲面から出る電界の線の本数を全部数えて、それに ϵ_0 との積が中身の電荷となる。



この概念を数式でかくと次のようになる。

$$\iint_{\text{閉曲面}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\text{中身の電荷}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ の \mathbf{n} は閉曲面の法線であり、左項全体は閉曲面から出る電界の線の総本数になる。また、閉曲面と電界が直交していて、かつ閉曲面のどこでも電界強度が同じであれば、閉曲面の表面積を使って、

$$\text{閉曲面の表面積} \times E = \frac{\text{中身の電荷}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

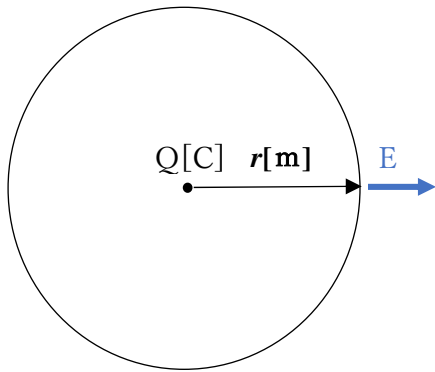
という簡単な式に帰着できる。

(1) 式は積分の用いた式であるが、微分形では

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3)$$

と表される。

例題1 [点電荷問題] 点電荷 $Q[\text{C}]$ を真空中に置いたときに、点電荷からの距離 $r[\text{m}]$ の位置の電界の強さ E をガウスの式を使って求めよ。真空の誘電率は ϵ_0 とする。



このような点電荷や球状電荷の場合は、閉曲面として点電荷を中心とした半径 r の球面を考える。ガウスの式の左項は、電界の閉曲面の面積分であり、電界 \mathbf{E} と閉曲面は直交しており、しかも閉曲面のどこでも電界の強さは同じであることから、閉曲面の面積 \times 電界の強さ E で表される。つまり、左項は $4\pi r^2 E$ となる。 E はベクトルではなく、電界の強さである。

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

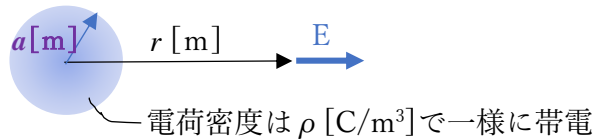
となり、

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

と求められる。

※ミニ解説 点電荷の作る電界の式のなかに $4\pi r^2$ がでてきていたが、これは球の表面積からきていることが分かる。このように物理法則の式で、点から四方八方に均一に、これを等方的というが、等方的に影響を及ぼす現象については $4\pi r^2$ が含まれることが多い。電磁気学では点電荷の電位の式やビオサバールの式などが例である。

例題2 [球状電荷] 半径 a [m] の球体内部に一様に電荷が分布していて、その電荷密度は ρ [C/m³] である。球体の中心からの距離 r [m] の位置の電界の強さ E をガウスの式を使って求めよ。この空間の誘電率は ϵ_0 とする。



球状電荷の場合は、閉曲面として球の中心から半径 r の球面を考える。
 ガウスの式の左項は演習1の答えと同様に $4\pi r^2 E$ となる。
ガウスの式の右項は半径 a より遠い場合と近い場合で場合分けをする。

$r > a$ の場合

$$4\pi r^2 E = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho}{\epsilon_0}$$

ここで $\frac{4}{3}\pi a^3$ は半径 a の球の体積であり、電荷密度 ρ をかけることで、半径 a の球の全電荷になる。

$r \leq a$ の場合

$$4\pi r^2 E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{\epsilon_0}$$

ここでは、ガウスの閉曲面内全体が帯電していることになるので、ガウスの閉曲面の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ をかけている。

答えは、

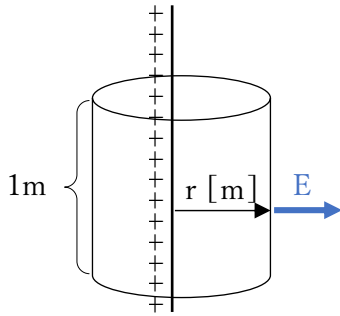
$r > a$ の場合

$$E = \frac{a^3 \cdot \rho}{3\epsilon_0 r^2}$$

$r \leq a$ の場合

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

例題3 [線状電荷] 無限に延びる直線状に、1 m当たり λ [C]で電荷が帯電しているときに、線からの距離 r [m]の位置の電界の強さ E をガウスの式を使って求めよ。この空間の誘電率は ϵ_0 とする。



この場合は、閉曲面として半径 r [m]で、高さ 1 mの円筒を考える。
ガウスの式をおもいだそう

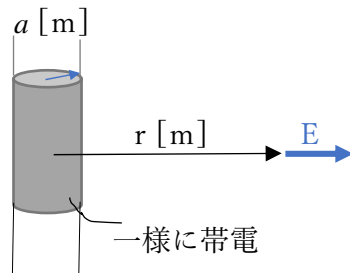
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\text{閉曲面で囲んだ中身の電気量}}{\epsilon_0} \text{ である。}$$

ここで左項は円筒の側面積が $2\pi r$ であることから $2\pi rE$ となる。
ガウスの式は次のように書き換えられる。

$$2\pi rE = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

以上より $E = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}$ となる。

例題4 [棒状電荷] 無限に延びる半径 a [m] の円筒状に、1 m 当たり λ [C] で電荷が帯電している。電荷は円筒において均一に帯電しているとする。円筒の中心線からの距離 r [m] の位置の電界の強さ E をガウスの式を使って求めよ。この円筒も含めて全空間の誘電率は ϵ_0 とする。



場合分けをする。

$r > a$ の場合

$$2\pi r E = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$r \leq a$ の場合

$$2\pi r E = \frac{\frac{\pi r^2}{\pi a^2} \lambda}{\epsilon_0}$$

$\frac{\pi r^2}{\pi a^2}$ であるが、この場合はガウスの閉曲面内部が帯電しており、その量は 1 m 当たり λ の半径 a の面積分の半径 r の面積になるからである。

答えは、

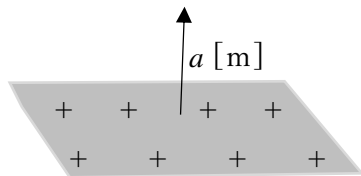
$r > a$ の場合

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

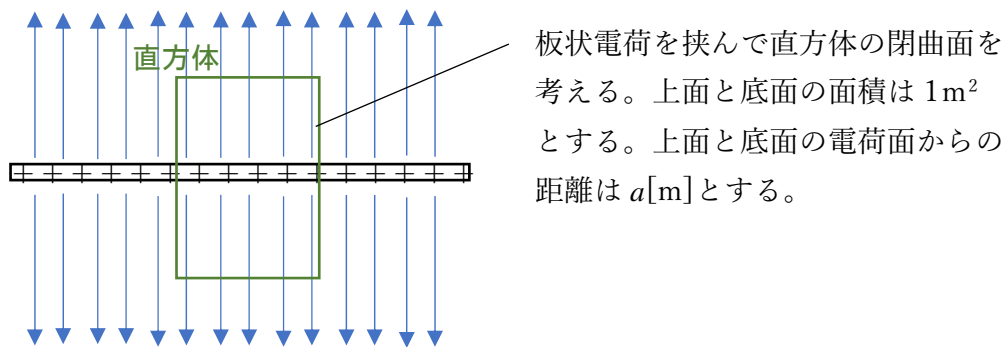
$r \leq a$ の場合

$$E = \frac{r\lambda}{2\pi a^2 \epsilon_0}$$

例題5 [面状電荷] 無限に広がるシートにおいて、1 m当たり σ [C]で電荷が一様に帯電している。シートから距離 a [m]の位置の電界 E の強さを求めよ。この空間の誘電率は ϵ_0 とする。



これは図のように、面を挟んで図のような直方体の閉曲面を考える。



板状電荷を挟んで直方体の閉曲面を考える。上面と底面の面積は 1m^2 とする。上面と底面の電荷面からの距離は a [m] とする。

これでガウスの式をたてる。

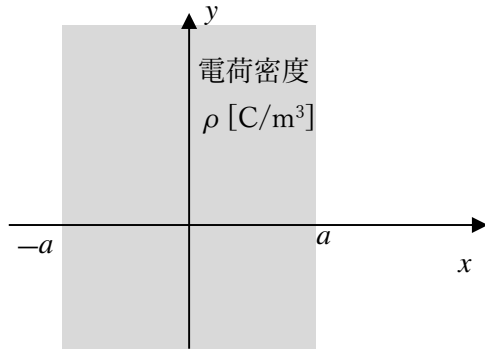
$$\iint_{\text{閉曲面}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = (\text{上面の面積} + \text{底面の面積}) E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

上面および底面の面積は 1m^2 なので、

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

となる。この時点で距離 a [m] は関係なくなる。

演習 6 [板状電荷] 次の面状に分布する電荷の中の電界強度をもとめてみる。xyz 座標において、 $-a < x < a$ の範囲で、電荷密度 ρ [C/m³] で分布しているとする。全空間の誘電率は ϵ_0 とする。



このような、板状に電荷が分布しているゾーンが板状である場合は、ガウスの式の微分形を使うと便利である。

$-a < x < a$ の範囲を考える。ガウスの微分形は

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

で表され、板状の場合、電界の方向は x 方向に平行になるため、 y 方向および z 方向の変化はないため、上の式は次のようになる。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1 回積分をすると、 x 方向の電界成分 E_x は

$$E_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} x + C \quad \text{となる。} \quad C \text{ は積分定数}$$

この系は yz 平面に対して対称であり、 $x=0$ で電界強度はゼロになるため、積分定数 C もゼロでる。電界ベクトルの x 成分は

$$E_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

となる。

$x > a$ の範囲では、電荷密度はゼロのため、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

を解けばよい。この領域では E_x は定数になるが、 $-a < x < a$ の範囲のとの連続性から、

$$E_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} a$$

となる。 $x < -a$ の範囲では $E_x = -\frac{\rho}{\epsilon_0} a$ となる。