高校数学の復習 11　漸化式の解き方全通り２

問題を与えますので、考えてみてください。

1. [分数漸化式]　次の漸化式の一般項を示しなさい。

1) $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + 3$　但し　$a_1 = 1$

2) $b_{n+1} = \frac{b_n}{2b_n+3}$　但し　$b_1 = 1$

2. [三項間漸化式]　次の漸化式の一般項を示しなさい。

1) $c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n$　但し　$c_1 = 1, c_2 = 3$

2) $d_{n+2} = 4d_{n+1} - 3d_n$　但し　$d_1 = 1, d_2 = 4$

3. [分数漸化式][難]　次の漸化式の一般項を示しなさい。

$f_{n+1} = \frac{4f_n-2}{f_n+1}$　但し　$f_1 = 3$

今日はさまざまな漸化式を解いていきましょう。基礎は前回の通りです。

1.[分数漸化式]　次の漸化式の一般項を示しなさい。

1) $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + 3$　　但し　$a_1 = 1$

これは見やすい形として、$\frac{1}{a_n} = m_n$とおいてみましょう。

$m_{n+1} = 2m_n + 3$　となります。この形から

$m_{n+1} - \alpha = 2(m_n - \alpha)$となるようなαをみつけます。

この式を展開すると、

$m_{n+1} = 2m_n - \alpha$

となり、αは−3 ともとめられます。

$m_{n+1} + 3 = 2(m_n + 3)$より

$m_n + 3 = 2^{n-1}(m_1 + 3) = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

$m_n = 2^{n+1} - 3$

$a_n = \frac{1}{2^{n+1}-3}$　n は自然数　（答え）

2)　$b_{n+1} = \frac{b_n}{2b_n+3}$　　但し $b_1 = 1$

この場合$b_n \neq 0$であると仮定して、両辺の逆数をとります。

$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2b_n+3}{b_n} = \frac{3}{b_n} + 2$　となる。

こちらも、$\frac{1}{b_n} = x_n$とすると、

$x_{n+1} = 3x_n + 2$

となり、こちらも

$x_{n+1} - \alpha = 3(x_n - \alpha)$となるようなαをみつけます。

$x_{n+1} = 3x_n - 2\alpha$となり、

α=−1 となる。

$x_{n+1} + 1 = 3(x_n + 1)$

$x_n + 1 = 3^{n-1}(x_1 + 1) = 2 \cdot 3^{n-1}$

よって、

$b_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1} - 1}$　nは自然数

となる。ここで得られた一般項からb_nはゼロになることはないので、
最初の仮定に問題はありません。

2. [三項間漸化式]　次の漸化式の一般項を示しなさい。

1) $c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n$　但し　$c_1 = 1, c_2 = 3$

この式からみて次のような式にならないかを考えます。

$$c_{n+2} - \alpha c_{n+1} = \beta(c_{n+1} - \alpha c_n)$$

こちらを展開すると

$$c_{n+2} = (\alpha + \beta)c_{n+1} - \alpha\beta c_n$$

となります。与式と比較すると、

$$\alpha + \beta = 3,\ \alpha\beta = 2$$

となります。**二次方程式の解と係数の関係**より、αとβは次の二次方程式の解になります。

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

これを**特性方程式**といいます。この解は 1 と 2 であり、$(\alpha,\beta)=(1,2), (2,1)$となります。
よって、二つの漸化式が得られます。

$$c_{n+2} - c_{n+1} = 2(c_{n+1} - c_n)$$

$$c_{n+2} - 2c_{n+1} = (c_{n+1} - 2c_n)$$

よって、

$$c_{n+1} - c_n = 2^{n-1}(c_2 - c_1) = 2^n$$

$$c_{n+1} - 2c_n = (c_2 - 2c_1) = 1$$

となります。この二式を連立させると。

$$c_n = 2^n - 1 \qquad n \text{は自然数}$$

となる。

2) $d_{n+2} = 4d_{n+1} - 3d_n$　但し　$d_1 = 1, d_2 = 4$

こちらも（1）と同様に求めます。

与式を整理して、

$$d_{n+2} - 4d_{n+1} + 3 = 0$$

$d_{n+2} = x^2, d_{n+1} = x$として、直接、特性方程式を求めてみましょう。

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

こちらの解は、1 と 3 になります。

よって、二つの漸化式が得られます。

$$d_{n+2} - d_{n+1} = 3(d_{n+1} - d_n)$$

$$d_{n+2} - 3c_{n+1} = (d_{n+1} - 2d_n)$$

よって、

$$d_{n+1} - d_n = 3^{n-1}(d_2 - d_1) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$d_{n+1} - 3d_n = (d_{n+1} - 3d_1) = 1$$

この二式を連立させると、

$d_n = \frac{3^n - 1}{2}$　n は自然数。　　　（答え）

3. [分数漸化式]　次の漸化式の一般項を示しなさい。

$f_{n+1} = \frac{4f_n - 2}{f_n + 1}$　但し $f_1 = 3$

このような特殊な分数漸化式の場合は特性方程式を次のように与えます

$$\alpha = \frac{4\alpha - 2}{\alpha + 1}$$

を解きます。

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0$$

となり、α は 1 か 2 と与えられます。

そして、新しい数列$b_n = \frac{f_n - 1}{f_n - 2}$とおきます。

$$b_{n+1} = \frac{f_{n+1} - 1}{f_{n+1} - 2} = \frac{\frac{4f_n - 2}{f_n + 1} - 1}{\frac{4f_n - 2}{f_n + 1} - 2} = \frac{\frac{3f_n - 3}{f_n + 1}}{\frac{2f_n - 4}{f_n + 1}} = \left(\frac{3}{2}\right) b_n$$

$$b_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

さらに、$b_n = \frac{f_n - 1}{f_n - 2}$より、

$$f_n = \frac{2b_n - 1}{b_n - 1} = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}$$

と求められます。