高校数学の復習９　二変数二次方程式の最大最小問題

まずは問題を与えますので、考えてみましょう。

1. （数学甲子園 2015　準々決勝問題より）　実数 a,b,c が$a-b+2c=1$を満たすとき、空間ベクトル$\vec{p}=(a,b,c)$の大きさ$|\vec{p}|$を最小にする$\vec{p}$を成分で表しなさい。

解き方は４通りを学んでいきますが、ここでは次の誘導にしたがって、線形代数の知識で解いていきます。

（１） $a-b+2c=1$を満たす$\vec{p}=(a,b,c)$の空間は平面になります。平面は、固定点と二つのベクトルの線形倍の和（線形代数では一次結合といいます）で表されます。まずその二つのベクトルを求めてください。

（２） $|\vec{p}|$を最小にするとは、$\vec{p}$が平面に対して垂直を向くときになります。すなわち、$\vec{p}$と上の設問で求めた二つのベクトルと垂直になるはずです。二つのベクトルが垂直になるときに、それらの内積はゼロになることを使って、最初の設問の答えを導きましょう。

2. 問題１において、$|\vec{p}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$を最小にすればよい。実際にこれを計算して、最小値を数式から求めなさい。これには平方完成を使うか、偏微分を使う、さらに判別式を使う方法があります。

解答

1. [線形代数的解法]

　$a-b+2c=1$より、この関係は、三変数で一式なので、二変数を任意の実数 s,tで置き換える。すなわち、$c=s$、 $b\ =t$とすると、$a=1+t-2s$となる。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t-2s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。$a-b+2c=1$を満たす空間は、固定点$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を通り、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形倍和（一次結合）で表される。二つのベクトルは、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$となり、平面とは平行である。

ここで$\vec{p}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+b-2c \\ b \\ c \end{pmatrix}$として、二つのベクトルの内積をゼロとして b と cを求める。

$$\begin{pmatrix} 1+b-2c \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1+b-2c+b = 2b-2c+1 = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1+b-2c \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2-2b+4c+c = -2b+5c-2 = 0 \quad (2)$$

式(1)と(2)を連立すると、$c=\frac{1}{3}$、$b=-\frac{1}{6}$と求められる。与式より$a=\frac{1}{6}$となる。

$\vec{p}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$のとき、二つのベクトルと直交し、$|\vec{p}|$は最小となる。

$$|\vec{p}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

となる。

2.　$a-b+2c=1$より

$\vec{p}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+b-2c \\ b \\ c \end{pmatrix}$として、

$$|\vec{p}|^2=a^2+b^2+c^2=(1+b-2c)^2+b^2+c^2=2b^2+5c^2-4bc+2b-4c+1 \qquad (2)$$

つまり、与題は

$$f(b,c)=2b^2+5c^2-4bc+2b-4c+1$$

の最小値を求める問題となる。

このような式を二変数多項式といい、最小（最大）を求めるには、**平方完成**、**偏微分**、**判別式 D** を使う方法がある。

[平方完成による方法]

与式を b の二次関数として整理する。

$$f(b,c)=2b^2-2(2c-1)b+5c^2-4c+1$$

まずは、赤文字を平方完成させる。

$$f(b,c)=2\left(b-\frac{(2c-1)}{2}\right)^2-2\left\{\frac{(2c-1)}{2}\right\}^2+5c^2-4c+1$$

$$=2\left(b-\frac{(2c-1)}{2}\right)^2+3c^2-2c+\frac{1}{2}$$

$$=2\left(b-\frac{(2c-1)}{2}\right)^2+3\left(c-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{6}$$

平方の最小はゼロであり、このときに$b-\frac{(2c-1)}{2}=0$、$c-\frac{1}{3}=0$がなりたつ。

したがって$c=\frac{1}{3}$、$b=-\frac{1}{6}$と求められ、与式より$a=\frac{1}{6}$となる。

$f(b,c)$の最小は$\frac{1}{6}$で、その平方根$\frac{\sqrt{6}}{6}$が$|\vec{p}|$となる。

[偏微分よる方法]

これは最小値が存在する仮定が成り立つうえで使う。この仮定は図形で考えれば、平面と原点からの距離の問題であり、最小が存在することは自明である。

このときに、

$$f(b,c)=2b^2+5c^2-4bc+2b-4c+1$$

として、次の偏微分がなりたつ。

$$\frac{\partial f}{\partial b}=\frac{\partial f}{\partial c}=0 \qquad \text{（重要）}$$

これより、b と c を求める。偏微分$\frac{\partial f}{\partial b}$の意味は、変数 b 以外の変数はすべて定数として微分するという意味である。

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 4b - 2(2c - 1) = 4b - 4c + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = 10c - 4b - 4 = -4b + 10c - 4 = 0$$

以上の連立方程式を解くと、$c = \frac{1}{3}$、$b = -\frac{1}{6}$と求められ、与式より$a = \frac{1}{6}$となる。

$f(b,c)$の最小は$\frac{1}{6}$で、その平方根$\frac{\sqrt{6}}{6}$が$|\vec{p}|$となる。

[判別式よる方法]

$f(b,c) = 2b^2 + 5c^2 - 4bc + 2b - 4c + 1$ が正の最小値 k を持つならば、$f(b,c) - k = 0$が実数解をもつはずである。ここで b の二次方程式として整理すると、

$$f(b,c) - k = 2b^2 - 2(2c - 1)b + 5c^2 - 4c + 1 - k$$

となる。つまり、b の二次方程式として実数解を持つ必要があるため、判別式 D≧0 となる。

$D = 2^2(2c - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (5c^2 - 4c + 1 - k) = 4(-6c^2 + 4c - 1 + 2k) \geq 0$

$6c^2 - 4c + 1 - 2k \leq 0$

$6\left(c - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 2k \leq 0$

$k \geq \frac{1}{6} + 6\left(c - \frac{1}{3}\right)^2$ となり、$c = \frac{1}{3}$のときに$k = \frac{1}{6}$となる。

よって、$b = -\frac{1}{6}$と求められ、与式より$a = \frac{1}{6}$となる。

$f(b,c)$の最小は$\frac{1}{6}$で、その平方根$\frac{\sqrt{6}}{6}$が$|\vec{p}|$となる。

[ラグランジュの未定定数法]　（発展　大学数学レベル）

ある関数$g(x,y) = 0$が成り立つうえで$f(x,y)$の極致を求めるときに、

$L(x,y,s) = f(x,y) - sg(x,y)$　但し s∈R（実数）

としたときに、極致は(x_0, y_0)はつぎの式の解となる。

$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial s} = 0$の解となる。

ここでは、

$$L(a,b,c) = f(a,b,c) - s(a-b+2c-1) = a^2 + b^2 + c^2 - s(a-b+2c-1)$$

とおいて、

$$\frac{\partial L(a,b,c)}{da} = 2a - s = 0$$

$$\frac{\partial L(a,b,c)}{db} = 2b + s = 0$$

$$\frac{\partial L(a,b,c)}{dc} = 2c - 2s = 0$$

$$\frac{\partial L(a,b,c)}{ds} = -a + b - 2c + 1 = 0$$

となる。以上を連立させると、

$s = \frac{1}{3}$となり、$(a,b,c) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$となる。

最小の$|\vec{p}|$は$\frac{\sqrt{6}}{6}$となる。