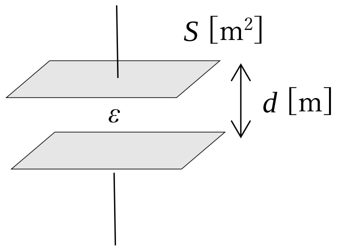
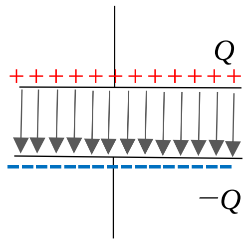
電磁気学演習　4 章　　コンデンサ

ポイント

1.　平行平板コンデンサ





コンデンサの名前は蓄電器の condenser からきている。平板電極の面積を S、電極間距離を d、平板間の誘電率を ε とすると、平行平板コンデンサの容量 C は

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad \varepsilon = \varepsilon_s \varepsilon_0$$

で表され、ε_s は比誘電率、ε_0 は真空の誘電率である。

コンデンサ C はコンデンサにかけられる電圧を V、蓄積される電荷 Q とすると、Q=CV の関係がある。コンデンサに電圧をかけると、左図のように電荷が蓄積され、上下の電荷はそれぞれ正負の符号は違うが同じ量である。電界のベクトルは電極間に局在する。

2.　平行平板コンデンサのエネルギー

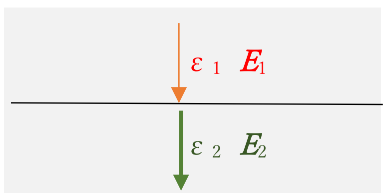
電荷 Q[C]で、極板間の電圧 V[V]、コンデンサ容量を C[F]とすると、コンデンサに貯められるエネルギーU[J]は、

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

である。平行平板コンデンサに蓄積されるエネルギーは、平行平板間の電界のある部分に**静電エネルギー**として蓄積される。単位体積当たりの静電エネルギーは$\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ である。静電エネルギーを電極間の体積の前空間で積分すると、コンデンサの蓄積エネルギーの$\frac{1}{2}QV$ と一致する。

3.　異なる誘電率を持つ領域を貫く電界の扱い

二重誘電体コンデンサのところでも扱うが、誘電率の異なる二領域を電界が通過するときに、電界の界面の垂直成分は、誘電率と電界の積（電束）が等しくなるという性質がある。これを知っていると、二重誘電体問題が簡単に解けるようになる。なお、界面と平行な電界成分は等しくなる。

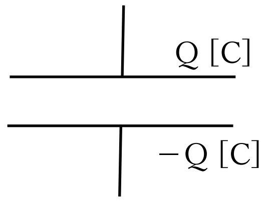


$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$　界面の垂直成分

$E_1 = E_2$　　界面と平行成分

例題 1　電極間距離 d[m]で、電極面積 S[m^2]の平行平板コンデンサーの静電容量をもとめなさい。電極間の誘電率は ε_0 とする。

図のようにコンデンサの両極に Q[C]、－Q[C]の電荷を与える。このとき、電極において単位面積当たりの電荷 σ は



$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

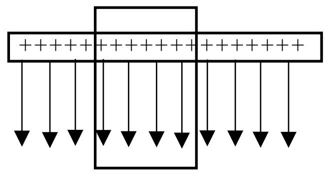
となり、上部電極では σ、下部電極では－ σ で帯電していることになる。

ガウスの法則より、単位面積当たり σ の電荷から、電界が下に出ている。つまり電界の大きさ E は

$$\mathrm{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

となる。

単位面積当たり σ がいて、下に電界がでている



平行平板間の電圧 V は、

$$V = E \times d = \frac{dQ}{\varepsilon_0 S}$$

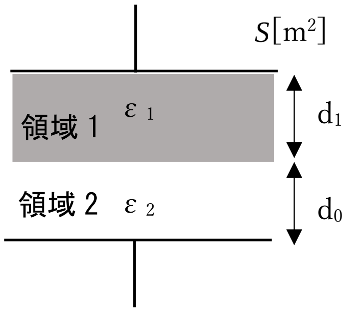
となる。

静電容量 C は Q÷V であたえられるので、

$$\mathrm{C} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

となる。

例題２　次のような二重誘電体コンデンサの静電容量を求めなさい。



これも 1 の問題と同様、コンデンサの両極に Q[C]、−Q[C]の電荷を与える。電極での単位面積当たりの電荷 σ は　$\sigma = \frac{Q}{S}$となり、上部電極では σ、下部電極では$-\sigma$が帯電する。

領域 1 での電界強度 E_1 は、

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_1 S}$$

となる。領域 2 での電界強度E_2は、

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_2 S}$$

となる。

極板間の電圧は、

$$\mathrm{V} = \mathrm{E_1 d_1} + \mathrm{E_2 d_2} = \frac{Q\mathrm{d_1}}{\varepsilon_1 S} + \frac{Q\mathrm{d_2}}{\varepsilon_2 S} = Q\left(\frac{\mathrm{d_1}}{\varepsilon_1 S} + \frac{\mathrm{d_2}}{\varepsilon_2 S}\right)$$

となる。

静電容量 C は、

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d_1}}{\varepsilon_1 S} + \frac{\mathrm{d_2}}{\varepsilon_2 S}} = \frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\mathrm{d_1} + \varepsilon_1\mathrm{d_2}}$$

となる。

（別解）領域 1 と領域 2 の電界の強さをそれぞれE_1、E_2とすると、$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$が成り立つ。これは二重誘電体を垂直に通過する電界の性質である。

極板間の電圧は、

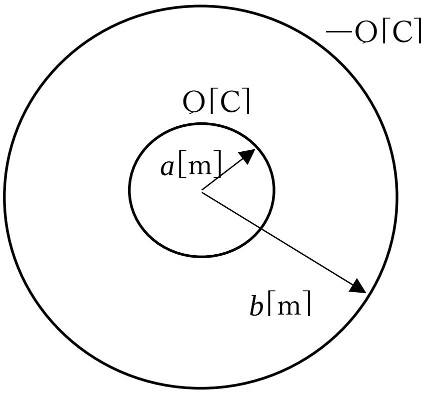
$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_1 d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 d_2$$

より、　$\mathrm{E_1} = \frac{\varepsilon_2 V}{\varepsilon_2 \mathrm{d_1} + \varepsilon_1 d_2}$となる。

上部電極の電荷 Qは$\varepsilon_1 \mathrm{E_1} S$で表されるので、$C = \frac{Q}{V} = \frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\mathrm{d_1} + \varepsilon_1\mathrm{d_2}}$と求められる。同様の計算より下部電極でも同じ大きさで負の電荷が計算で求められる。

例題 3　二重球殻コンデンサの問題

(1) 内球と外球にそれぞれ電荷 Q と－Q をおいたときに、各部の電界強度を求めよ。空間の誘電率は ε_0 とする。
(2) このときの静電エネルギーの分布を求めよ。
(3) このときの電位の分布を求めよ。
(4) 内球と外球の電位差を求めよ。ただし外球の電位を 0 とする。
(5) 内球と外球を金属電極とみなしたときに、この両極間の静電容量を求めよ。



(1) 内球と外球にそれぞれ電荷 Q と－Q をおいたときに、各部の電界強度を求めよ。空間の誘電率は ε_0 とする。

これはガウスの法則を使えば簡単である。

$r<a$ のとき

$$\int_S E\cdot ndS = 4\pi r^2 E = 0 \qquad \therefore E = 0$$

$a<r<b$ のとき

$$\int_S E\cdot ndS = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$$

$r>b$ のとき

$$\int_S E\cdot ndS = 4\pi r^2 E = \frac{Q-Q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \therefore E = 0$$

(2) このときの静電エネルギーの分布を求めよ。

静電エネルギーの式は $U=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ で与えられる。

$r<a$ のとき　　$U=0$

$a<r<b$ のとき　　$U=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$

$r>b$ のとき　　$U=0$

(3) このときの電位の分布を求めよ。

電位は電界の線積分の式で求める。

$V=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$より

$r>b$ のとき　$V=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=0$　この間ゼロである。

$a<r<b$ のとき　　$V=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{\infty}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}-\int_{b}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$

$$=-\int_{b}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{b}^{r}\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$$

$r<a$ のとき　　$V=-\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{\infty}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}-\int_{b}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{b}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

(4) 内球と外球の電位差を求めよ。ただし外球の電位を 0 とする。

$V=-\int_{b}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ となる.

(5) 内球と外球を金属電極とみなしたときに、この両極間の静電容量を求めよ。

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

となる。