

電磁気学基礎 1章 点電荷の作る電界

1. 点電荷の作る電界

点電荷 $Q[\text{C}]$ がおかれていて、ベクトル \mathbf{r} の位置に作る電界ベクトル \mathbf{E} は次の式で表される。真空の誘電率を ϵ_0 とする。

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

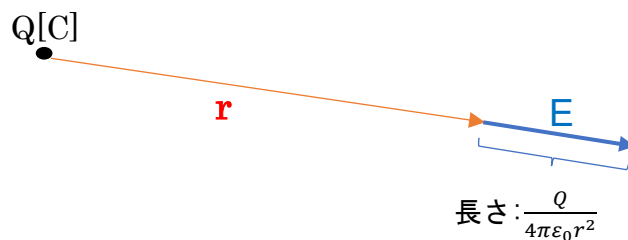
ベクトル \mathbf{r} は、位置ベクトルと呼ばれ、 $\mathbf{r} = (a, b, c)$ とすると、

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{位置ベクトルの距離 (長さ)}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (a, b, c) \quad \text{位置ベクトルの単位ベクトル}$$

2. 点電荷の作る電界を作図としてとらえる。

点電荷のおかれた位置から位置ベクトル \mathbf{r} の先にできる電界ベクトルを作図するときは、位置ベクトル \mathbf{r} の先から、 \mathbf{r} と同じ方向に、長さ $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ の大きさの矢印を書く。



3. 重ね合わせの原理

複数の点電荷の作る電界を計算するために、個々の点電荷が作る電界をそれぞれ計算し、ベクトルとして足し合わせる。この原理を使うことであらゆる形状の点電荷の作る電界を計算することができる。

例題1 点電荷 Q_1 [C]が原点に、点電荷 Q_2 [C]が(2,0,0)の位置にある。点 P (3,3,3)の位置にできる電界をベクトルとして求めなさい。

Q_1 [C]が点 P に作る電界と Q_2 [C]が点 P に作る電界をそれぞれ求めて、ベクトルとして足せばよい。

Q_1 の作る電界ベクトル \mathbf{E}_1 を求める。

位置ベクトル \mathbf{r}_1 を求める。終点座標から始点座標を引いて求める。

$$\mathbf{r}_1 = (3,3,3) - (0,0,0) = (3,3,3)$$

$$\text{長さ } r_1 = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

後は式に当てはめて、

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 = \frac{Q_1}{108\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

同様に、 \mathbf{E}_2 は

$$\mathbf{r}_2 = (3,3,3) - (2,0,0) = (1,3,3)$$

$$r_2 = \sqrt{19}$$

より

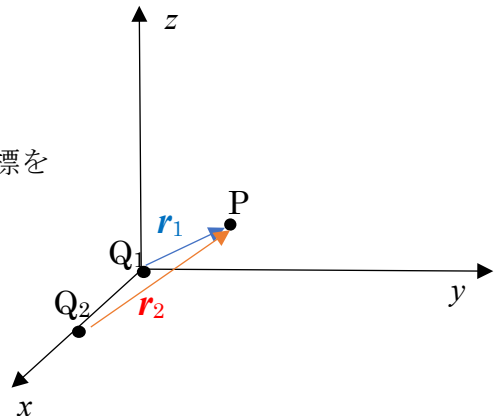
$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 = \frac{Q_2}{76\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}} \right)$$

求める電界はそれぞれの電界ベクトルを足し合わせることで求められる。

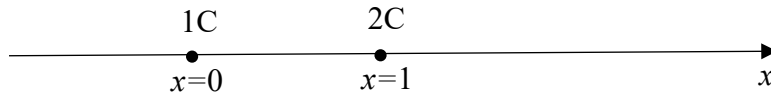
$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{Q_1}{108\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{Q_2}{76\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}} \right)$$

となる。

注) ここではベクトルの表示に括弧つきの座標で表示しているが、もちろん単位ベクトルで \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} を使った表示でも問題はない。



例題 2 x 軸上の 2 点に電荷がおかれている。1 C が $x=0$ の位置に、2 C が $x=1$ の位置に置かれている。電界の強さが 0 になる位置の x 座標を求めよ。



両方の電荷とも正であり、その前後に電界を発する。電界がゼロになるのは、1 C が作る電界ベクトルと 2 C の作る電界ベクトルが互い違いになる必要があり、その座標は $0 < x < 1$ の範囲である。

仮に、電界がゼロになる座標を t とする。

1 C の電荷が座標 t の位置に作る電界の大きさは

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 t^2}$$

となり、方向は右向きである。

1 C の電荷が座標 t の位置に作る電界の大きさは

$$\frac{2}{4\pi\epsilon_0 (1-t)^2}$$

となり、方向は左向きである。これらの大きさが等しいので、

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 t^2} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0 (1-t)^2}$$

$$(1-t)^2 = 2t^2$$

これを解くと、

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

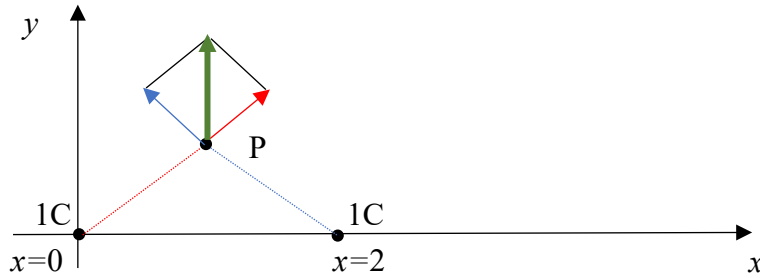
$0 < t < 1$ より、

$$t = \frac{-2 + \sqrt{4+4}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

となる。 $x = -1 + \sqrt{2}$ の位置が電界ゼロになる。

例題 3 原点と点 (2,0,0) の位置に Q[C] の電荷がおかれている。点 P(1,1,0) の位置における電界ベクトルを図示せよ。

例題 1 と同じ解き方をしてもよいが、ここは作図で解くことにする。



まず、原点の 1C の作る電界ベクトルを作図しよう。

原点と点 P の距離は $\sqrt{2}$ であるため、P 点での電界の強さは、

$\frac{1}{8\pi\epsilon_0}$ となる。この大きさの矢印を赤で書く。赤矢印の大きさはここでは適当である

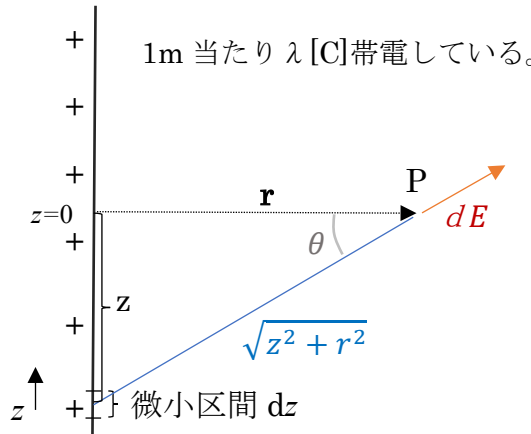
が、 $\frac{1}{8\pi\epsilon_0}$ の大きさがあると想定しておく。続いて $x=2$ での 1C の作る電界の大きさも距

離が $\sqrt{2}$ であり、 $\frac{1}{8\pi\epsilon_0}$ の大きさとなる。これを青矢印で書く。

赤矢印と青矢印の合成を緑で表しこれが求める電界ベクトルになるが、この赤・青の矢印の長さは同じで、それらの角度が 90° であるので、緑矢印は赤・青矢印を辺とする正方形の頂点になるように書く。これが P 点上でできる電界ベクトルであるが、そ

の長さは、正方形の辺が $\frac{1}{8\pi\epsilon_0}$ であり、その対角線の長さとなり、 $\frac{\sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0}$ となる。

例題 4 線状電荷の作る電界 無限に伸びる線上に電荷が λ [C/m] で帯電しているとする。距離 r [m] 離れた位置の電界の大きさを求めよ。



単位長さ(すなわち 1m)の微小区間 dz の電荷 λdz が距離 r [m] 離れた位置を P とし、そこで作る電界の大きさを求めてみる。図のような距離関係から

$$dE = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0(z^2+r^2)}$$

となる。電界ベクトル dE は図では右上にあがっているように見えるが、線の全区間分を重ね合わせると、水平方向の分しか残らない。したがって、上式に $\cos \theta$ をかけて、 z を $-\infty$ から ∞ まで積分することで、点 P の位置の電界ベクトルを求めることができる。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos \theta dz}{4\pi\epsilon_0(z^2+r^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda r dz}{4\pi\epsilon_0(z^2+r^2)^{3/2}}$$

上の積分であるが、 $z = r \tan \theta$ とすると、 $\frac{dz}{d\theta} = r \frac{1}{\cos^2 \theta}$ となる。

$z^2 + r^2 = r^2(1 + \tan^2 \theta) = r^2 / \cos^2 \theta$ 、積分区間は $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$ より

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda r^2 d\theta \frac{1}{\cos^2 \theta}}{4\pi\epsilon_0 r^3 / \cos^3 \theta} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

となる。

※この程度の積分は大学学部生であればぜひ自力で解けるようにしておきたい。