

2023/1/28 版

学びなおしの数学

# 基礎から学ぶ積分 50 選

廣瀬文彦 著

## よく使う積分公式

ここで  $C$  は積分定数とします。

$$\text{定数の積分} \quad \int a \, dx = ax + C$$

$$x^n \text{ の積分} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{但し } n \neq -1$$

$$1/x \text{ の積分} \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$\sin \text{ の積分} \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\cos \text{ の積分} \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\tan \text{ の積分} \quad \int \tan x \, dx = -\log|\cos x| + C$$

$$1/\sin^2 x \text{ の積分} \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$1/\cos^2 x \text{ の積分} \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\log \text{ の積分} \quad \int \log x \, dx = x(\log x - 1) + C$$

$$e^x \text{ の積分} \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\text{指数関数の積分} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\text{分数関数の積分} \quad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad a \text{ は定数}$$

$$\text{分数関数の積分} \quad \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad a \text{ は定数}$$

$$\text{分数関数の積分} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C \quad a \text{ は定数}$$

$$\text{分数関数の積分} \quad \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2} a^2 \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C \quad a \text{ は定数}$$

$$\text{部分積分} \quad \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

## 積分計算によく使う微分公式

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \neq 0) \quad (e^x)' = e^x \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (1/\tan x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

合成関数の微分

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$$

問題 1 **基本**

$$\int \left( x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$$

基本中の基本の積分公式を使います。

**定数の積分**  $\int a dx = ax + C$  (積分定数)

**$x^n$ の積分**  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  (積分定数) 但し  $n \neq -1$

**$1/x$ の積分**  $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$  (積分定数)

※ $\log$  は底が表示されていないときには、自然対数とします。

これは

$$\int \left( x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + \log|x| + C$$

となります。不定積分では積分定数  $C$  を忘れないようにしてください。

問題 2 **基本**

$$\int \frac{1}{x+a} dx \quad a \text{は定数}$$

この結果は公式として覚えておいてもよいですが、ある関数を微分したからインテグラルの中身になるとするならばそれが不定積分の関数になります。この場合、 $\log|x+a|$ を微分したら、 $\frac{1}{x+a}$ になるので、

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \log|x+a| + C \text{ (積分定数)}$$

問題 3 **基本**

$$\int (\sin x + \cos x) dx$$

三角関数の積分公式を使います。

sin の積分       $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$  (積分定数)

cos の積分       $\int \cos x \, dx = \sin x + C$  (積分定数)

$$\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

となる。

問題 4 基本

$$\int (\sin 2x) dx$$

これは $-\cos 2x$ を微分したら $2\sin 2x$ となることを、頭の中で思い浮かべてこの不定積分を予想する。

$$\int (\sin 2x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

となる。

問題 5 基本  $\tan x$  の積分

$$\int \tan x \, dx$$

$$\int (\tan x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

ここで  $\log|\cos x|$ を微分すると $-\frac{\sin x}{\cos x}$ になることを想定できれば次のように求められる。

$$\int (\tan x) dx = -\log|\cos x| + C$$

問題 6  $\cos^2 x$  の積分

$$\int \cos^2 x \, dx$$

これは和積公式を使う。

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

より

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

となり、

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{\cos 2x + 1}{2} \\ \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{\cos 2x + 1}{2} \, dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

問題 7  $1/\cos^2 x$  の積分

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$$

これも、**微分すると元関数になる関数を想定する**問題です。 $\frac{\sin x}{\cos x}$ を微分する

とこの形になる。これを微分すると

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

となる。

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \frac{\sin x}{\cos x} + C = \tan x + C$$

問題 8  $1/\sin^2 x$  の積分

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$$

これも、**微分すると元関数になる関数を想定する**問題です。 $\frac{\cos x}{\sin x}$ を微分する

とこの形になる。これを微分すると

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

となる。

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + C = -\frac{1}{\tan x} + C$$

問題 9  $1/\sin x$  の積分 **難問**

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

これは知っていないとできない形ではあるが、やり方を覚えておいて損はない。

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x \cdot \sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

ここで部分分数分解する。

$$\frac{\sin x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} \right)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} \right) dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \log|1 + \cos x| + \frac{1}{2} \log|1 - \cos x| + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{|1 - \cos x|}{|1 + \cos x|} + C = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C \end{aligned}$$

問題 10  $1/\cos x$  の積分 **難問**

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

これも前問と同様に部分分数分解を行う。

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

ここで部分分数分解する。

$$\frac{\cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \left( \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx \\ &= \frac{1}{2} \log|1 + \sin x| - \frac{1}{2} \log|1 - \sin x| + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{|1 + \sin x|}{|1 - \sin x|} + C = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C \end{aligned}$$

問題 11 **基本** 指数関数の積分

$$\int e^{2x} dx$$

$e^x$ の積分  $\int e^x dx = e^x + C$ (積分定数)

これも $e^{2x}$ を微分したら $2e^{2x}$ となることを想定して、不定積分を予想する。

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \text{ (積分定数)}$$

問題 12 **指数関数**の積分

$$\int a^x dx \quad (a > 0, a \neq 1)$$

この答えを公式として覚えおくとよい。

$$y = a^x$$

とする。両辺を自然対数をとる。

$$\log y = \log a^x = x \log a$$

両辺を $x$ で微分すると、

$$\frac{y'}{y} = \log a$$

つまり

$$y' = \log a \cdot y = \log a \cdot a^x$$

となる。つまり、 $a^x$ を微分すると $\log a$ が掛け算されるので、積分形はつぎのように予想できる。

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

問題 13 **基本** 部分積分

$$\int x \cos x dx$$

この式の場合は、 $x$ を消すことができれば計算が簡単になります。

次の部分積分の公式を使いましょう。

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

この場合は $f(x) = x$ とします。

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

問題 14 **部分積分**を2回使う

$$\int x^2 \sin x dx$$

これは部分積分を2回使って $x^2$ を消しに行きます、

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C \end{aligned}$$

<参考>これも一発で求めるやり方があります。

微分する関数が $x^2$ 、積分する関数が $\sin x$ なので並べて考えます。

	微分		積分
元関数	$x^2$	積+	$\sin x$
一回部分積分	$2x$	積-	$-\cos x$
一回部分積分	$2$	積+	$-\sin x$
一回部分積分	$0$	積-	$\cos x$
終わり			

以上より斜めに積をとって+、-を繰り返して足し合わせます。

例

$$\int x^4 e^x dx$$

	微分		積分
元関数	$x^4$		$e^x$



一回部分積分	$4x^3$	$e^x$
一回部分積分	$12x^2$	$e^x$
一回部分積分	$24x$	$e^x$
一回部分積分	$24$	$e^x$
一回部分微積分	$0$	$e^x$

終わり

斜めに積を取って足し引きする。

$$\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24e^x + C$$

問題 15 **基本** 部分積分

$$\int x e^x dx$$

これも部分積分の出番です。

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C$$

問題 16 **基本** 部分積分

$$\int \log x dx$$

これは  $\log x$  と  $x$  の 1 階微分の 1 の積と考えて部分積分をする。

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$$

問題 17 **基本** 部分積分

$$\int (2x + 1) \log x dx$$

これは  $\log x$  を積分すると  $1/x$  になることを使います。

$$\begin{aligned}
& \int (2x + 1) \log x \, dx \\
&= (x^2 + x) \log x - \int (x^2 + x) \frac{1}{x} dx \\
&= x(x + 1) \log x - \int (x + 1) dx = x(x + 1) \log x - \frac{1}{2}x^2 - x + C
\end{aligned}$$

問題 18 部分積分

$$\int e^x \sin x \, dx$$

この問題は部分積分を 2 回行くと、与式を含む項が出てくることを利用します。面白いやり方ですので覚えておきましょう。

$$\int \sin x e^x \, dx = \sin x e^x - \int \cos x e^x \, dx = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x \, dx$$

したがって、

$$\int \sin x e^x \, dx = \frac{\sin x e^x - \cos x e^x}{2} + C = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

問題 19 微分すると元関数となる形を想定

$$\int (2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^3 \, dx$$

簡単な置換積分の範囲ですが、これは次のように発想します。

三乗している関数  $x^2 + 3x + 1$  を微分すると、 $2x + 3$  になります。つまり、 $(x^2 + 3x + 1)^4$  を微分すると、 $4(x^2 + 3x + 1)^3$  と  $2x + 3$  の積になると考えて、次のように答えを想定します。

$$\int (2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^3 \, dx = \frac{(x^2 + 3x + 1)^4}{4} + C$$

問題 20 微分すると元関数となる形を想定

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$$

この積分は大学の物理学（電磁気学）でよく使う積分になります。

これも  $x^2 + 1$  を微分すると  $2x$  となることに注意します。そこで  $\sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$  を

微分してみましょう。

$$(\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

より、

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + C$$

問題 21 微分すると元関数となる形を想定

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

これも $\log(1+e^x)$ を微分すると元関数になります。

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \log(1+e^x) + C$$

$1+e^x$ に絶対値ではないのはこの関数が必ず正であるので単純カッコで表示しています。

問題 22 置換積分

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} dx$$

この問題は分子を展開して解けば簡単ですが、置換積分として解いてみましょう。

$$t = \sqrt{x} + 1$$

とします。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{与式} = \int 2 \cdot t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{3} (\sqrt{x} + 1)^3 + C$$

別解

分子を展開してみます。

$$\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 2 + 1/\sqrt{x}$$

$$\text{与式} = \int \left( \sqrt{x} + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + 2\sqrt{x} + C$$

この結果は変形すると先ほどの解になります。

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + 2\sqrt{x} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + C &= \frac{2}{3} \left( (\sqrt{x})^3 + 3(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 1 \right) - \frac{2}{3} + C \\ &= \frac{2}{3}(\sqrt{x} + 1)^3 + C_2 \end{aligned}$$

問題 23 置換積分

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

問題は 18 と同じですが、置換積分について練習してみましょう。

まず  $t = x^2 + 1$  とおきます。積分要素を  $dx$  から  $dt$  に変換します。これは  $t$  を  $x$  に偏微分することで求めます。

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

つまり、 $dt = 2xdx$  より、

$$\text{与式} = \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} dt = t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2 + 1} + C$$

問題 24 置換積分

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$$

このパターンでしたら、まず根号を外しに行きましょう。 $t = \sqrt{x+1}$  とおいてみます。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

すなわち

$$dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

となり、 $t = \sqrt{x+1}$  より  $x = t^2 - 1$

$$\text{与式} = 2 \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = 2 \int \frac{1}{-2} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt$$

$$= -(\log|t+1| - \log|t-1|) + C = \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \log \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$$

問題 25 置換積分

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

問題 21 と同じです。置換積分で積分区間がある場合は変数の変化域を間違いないようにかいておきましょう。

まず  $t=1+e^x$  とおきます。積分要素を  $dx$  から  $dt$  に変換します。これは  $t$  を  $x$  に偏微分することで求めます。

$$\frac{dt}{dx} = e^x$$

つまり、 $dt = e^x dx$  となります。また、変数域は次のようになります。

面倒がらずに必ず表にしましょう。

$x$		1	→	2
$t$		$1+e$	→	$1+e^2$

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_{1+e}^{1+e^2} \frac{1}{t} dt = [\log t]_{1+e}^{1+e^2} = \log \frac{1+e^2}{1+e}$$

問題 26 置換積分

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx$$

置換積分にはコツがあって、このような  $x^2+1$  を含む場合は  $x=\tan \theta$  と置くと、うまくいくことがあります。なぜなら

$$x^2+1 = \tan^2 \theta + 1 = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

と変形できます。一方、

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

すなわち、 $dx = \cos^{-2} \theta d\theta$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \int \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int 1 d\theta = \theta + C = \arctan x + C$$

**別解** 部分分数分解でも解けます。

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2i} \left( \frac{-1}{x+i} + \frac{1}{x-i} \right)$$
$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{2i} \left( \frac{-1}{x+i} + \frac{1}{x-i} \right) dx = \frac{1}{2i} (-\log(x+i) + \log(x-i)) + C$$

ここでオイラーの式  $a+bi = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta}$  但し  $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$  をつかって、 $\log$  を外す。

$$-\log(x+i) + \log(x-i) = -\log \sqrt{x^2+1}e^{i\theta} + \log \sqrt{x^2+1}e^{-i\theta} \quad \textcircled{1}$$

ただし、 $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{x}$

$$\textcircled{1} \text{式} = -\log \sqrt{x^2+1} - \log e^{i\theta} + \log \sqrt{x^2+1} + \log(e^{-i\theta})$$
$$= 2i\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2i} \times -2i\theta + C = -\tan^{-1} \frac{1}{x} + C$$

逆関数の公式をつかいます。

$$\tan^{-1} a + \cot^{-1} a = \frac{\pi}{2}$$

より、 $\tan^{-1} a + \tan^{-1} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{2} + C = \tan^{-1} x + C_1$$

**問題 27 置換積分**

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx$$

但し  $-1 < x < 1$  とする。

これは部分分数に分解してしまうのが手ですが、 $x = \cos \theta$  と置く置換積分を練習しましょう。

$$1-x^2 = 1-\cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$$

すなわち、 $dx = -\sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2} dx &= \int \frac{-\sin \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = -\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \log \frac{|1-\cos \theta|}{|1+\cos \theta|} + C = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right) + C\end{aligned}$$

**別解** 最初に述べましたとおり、この問題は部分分数分解の方が速く解けます。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2} dx &= \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} (-\log|1-x| + \log|1+x|) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{|1+x|}{|1-x|} + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right) + C\end{aligned}$$

問題 28 置換積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

これらの問題では、 $x=\tan \theta$  とおいて解くことにします。

$$1+x^2 = \tan^2 \theta + 1 = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

すなわち、 $dx = \cos^{-2} \theta d\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1-\sin \theta} \right) d\theta = \frac{1}{2} (\log(1+\sin \theta) - \log(1-\sin \theta)) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} \right) + C\end{aligned}$$

ここから変数を元に戻します。

$$x = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$$

より

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} &= \frac{1 + \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}{1 - \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\right)^2}{\left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\right)} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\right)^2}{\frac{1}{1+x^2}} \\ &= \left(\sqrt{1+x^2} + x\right)^2\end{aligned}$$

となり、

$$\text{与式} = \frac{1}{2} \log(\sqrt{1+x^2} + x)^2 + C = \log|\sqrt{1+x^2} + x| + C$$

(別解) この問題は、知らないといけないでしょうが、次のように置き換えると簡単に求めることができます。受験問題でもこのような誘導がつくことが多いです。

$\sqrt{1+x^2} = t-x$  とおきます。

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{t}{t-x}$$

$$dx = \frac{t-x}{t} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{t-x}$$

以上により、非常に都合がよく変数が打ち消されます。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{t-x} \frac{t-x}{t} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|x + \sqrt{1+x^2}| + C$$

これは知らないといけないですね。

### 問題 29 置換積分

$$\int x\sqrt{4-x^2} dx$$

これは  $t = 4 - x^2$  と置換してみましょう。

$\frac{dt}{dx} = -2x$  より  $dt = -2xdx$  となる。

$$\int x\sqrt{4-x^2} dx = \int -\frac{\sqrt{t}}{2} dt = \left[-\frac{2t^{3/2}}{2 \cdot 3}\right] + C = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + C$$

### 別解

与式の  $\sqrt{\quad}$  内は暗黙の了解として正であると、 $x = 2\sin\theta$  としてみる。



$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta \quad \text{より} \quad dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$x\sqrt{4-x^2} = 2 \sin \theta \sqrt{4-(2 \sin \theta)^2} = 2 \sin \theta (2 \cos \theta) = 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int x\sqrt{4-x^2} dx = \int 4 \sin \theta \cos \theta \cdot 2 \cos \theta d\theta = 8 \int \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{8}{3} \cos^3 \theta + C \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

となるが、与式内の $\sqrt{\quad}$ の中は0以上と考えると、 $4-x^2 \geq 0$  より 上式の $\cos \theta$ は0以上であるため

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

となる。

$$\text{与式} = -\frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

### 問題 30 置換積分

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx$$

これは $t = \sqrt{x}$ と置換してみましょう。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{より} \quad dx = 2\sqrt{x} dt = 2t dt \quad \text{となる。}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx = \int \frac{2t^2}{t^2-4} dt = \int \frac{2t^2-8+8}{t^2-4} dt = \int \left(2 + \frac{8}{t^2-4}\right) dt$$

$$\int \frac{8}{t^2-4} dt = \int \frac{8}{(t-2)(t+2)} dt = 2 \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt =$$

$$= 2 \log|t-2| - 2 \log|t+2| + C = 2 \log \left| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right| + C$$

$$\text{与式} = 2\sqrt{x} + 2 \log \left| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right| + C$$

問題 31 置換積分

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

まずは、分母は因数分解できないので、平方完成してみましょう。

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4 \left\{ \left( \frac{x + 1}{2} \right)^2 + 1 \right\}$$

ここで  $\tan \theta = \frac{x+1}{2}$  とおきます。両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2}$$

となり、 $dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$  となる。

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 \theta}{1} \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{2} \theta + C \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{x + 1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

もっと簡単に

$$t = \frac{x+1}{2} \text{ とすると、} dx = 2dt$$

$$\text{与式} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot 2dt = \frac{1}{2} \tan^{-1} t + C = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{x + 1}{2} \right) + C$$

公式を使って簡単に解くこともできます。

問題 32 置換積分

$$\int \sin^3 x dx$$

この問題も思考を柔軟にして取り組みましょう。

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx \\ &= -\cos x - \int \sin x \cos^2 x dx \end{aligned}$$

$\cos x = t$  とすれば、 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$  より

$$\text{与式} = -\cos x + \int t^2 dt = -\cos x + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

**別解** 三倍角の公式  $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$  より、

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

から

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \left( \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta \right) d\theta = -\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta + C$$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$  より

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= -\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + C \\ &= -\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta + C \end{aligned}$$

**問題 33** **難問** 置換積分  $\tan\frac{x}{2}$  を使う

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} \, dx$$

三角関数だけからなる積分を行うときには、 $s = \tan\frac{x}{2}$  とおいて計算すると  $s$  の多項式に変換することができます。

$$s = \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos x}}{\pm\sqrt{1+\cos x}}$$

参考 半角公式

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

よって

$$\cos x = \frac{1-s^2}{1+s^2} \quad \sin x = \frac{2s}{1+s^2}$$

となる。また

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(1 + s^2)$$

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} \, dx = \int \frac{1}{\frac{1-s^2}{1+s^2} + \frac{2s}{1+s^2}} \cdot \frac{2}{1+s^2} \, ds = \int \frac{2}{1+2s-s^2} \, ds$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{s - \sqrt{2} - 1} ds + \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{s + \sqrt{2} - 1} ds = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{|s + \sqrt{2} - 1|}{|s - \sqrt{2} - 1|} + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{|\tan \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1|}{|\tan \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1|} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{|\tan \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1|}{|\tan \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1|} + C
\end{aligned}$$

### 別解

分母の三角関数を合成してまとめてみます。

$$\begin{aligned}
\sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left( \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{与式} = \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin x} &= \frac{\sin x}{\sin x \cdot \sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \\
&= \frac{\sin x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} \right)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} + \frac{\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 - \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 - \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} dx \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| 1 + \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| 1 - \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \tan^2 \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \tan \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} \right| + C \quad (\text{答え})
\end{aligned}$$

先ほど求めた解と一致するか確かめてみます。

$\tan$  の加法定理より

$$\tan \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \frac{x}{2} \tan \frac{\pi}{8}}$$

となります。

ここで

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

となります。

$$\tan \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{1 - \tan \frac{x}{2} (\sqrt{2} - 1)} = \frac{-1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \tan \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} \right| + C &= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{-1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1} \right| + C_1
\end{aligned}$$

問題 35 **難問** 置換積分  $\tan \frac{x}{2}$  を使う

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

この問題も  $s = \tan \frac{x}{2}$  とおいて計算すると  $s$  の多項式に変換することができます。

$$s = \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos x}}{\pm \sqrt{1 + \cos x}}$$

参考 半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

よって

$$\cos x = \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \quad \sin x = \frac{2s}{1 + s^2}$$

となる。また

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) = \frac{1}{2} (1 + s^2)$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx = \int \frac{1}{\frac{2s}{1+s^2} + \frac{1-s^2}{1+s^2} + 1} \times \frac{2}{(1+s^2)} ds \\ &= \int \frac{2}{2s + 1 - s^2 + 1 + s^2} ds = \int \frac{1}{s + 1} ds \\ &= \log|s + 1| + C = \log \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + C \end{aligned}$$

問題 36 **難問** 置換積分  $\tan \frac{x}{2}$  を使う

$$\int \frac{1}{\cos x + 2} dx$$

この問題も  $s = \tan \frac{x}{2}$  とおいて計算すると  $s$  の多項式に変換します。

$$s = \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos x}}{\pm \sqrt{1 + \cos x}}$$

参考 半角公式

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

よって

$$\cos x = \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \quad \sin x = \frac{2s}{1 + s^2}$$

となる。また

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) = \frac{1}{2} (1 + s^2)$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int \frac{1}{\cos x + 2} dx = \int \frac{1}{\frac{1 - s^2}{1 + s^2} + 2} \times \frac{2}{(1 + s^2)} ds \\ &= \int \frac{2}{1 - s^2 + 2 + 2s^2} ds = \int \frac{2}{s^2 + 3} ds \\ &= \int \frac{2}{3 \left( \left( \frac{s}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} ds = \frac{2}{3} \tan^{-1} \left( \frac{s}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{2}{3} \tan^{-1} \left( \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

### 問題 37 部分積分・置換積分

$$\int \frac{x}{3^x} dx$$

部分積分を使います。そのためにも

$$\int \frac{1}{3^x} dx$$

を計算します。

$$t = \frac{1}{3^x}$$

とする。両辺の  $\log$  をとると、

$$\log t = -x \log 3$$

となり、両辺を  $x$  で微分する。

$$\frac{1}{t} \frac{dt}{dx} = -\log 3$$

$$dx = -\frac{1}{t \log 3} dt$$

よって、

$$\int \frac{1}{3^x} dx = \int t \left( -\frac{1}{t \log 3} dt \right) = -\frac{1}{\log 3} t + C = -\frac{1}{3^x \log 3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{3^x} dx &= -\frac{x}{3^x \log 3} + \int \frac{1}{3^x \log 3} dx = -\frac{x}{3^x \log 3} + \frac{1}{\log 3} \int \frac{1}{3^x} dx \\ &= -\frac{x}{3^x \log 3} - \frac{1}{\log 3} \cdot \frac{1}{3^x \log 3} + C = \frac{-1}{3^x \log 3} \left( \frac{x}{\log 3} + 1 \right) + C \end{aligned}$$

問題 38 分数関数の積分・置換積分

$$\int \frac{1}{2x^2 + 6x + 19} dx$$

このように、分数関数の積分が出てきた場合は知っている積分できる関数に近づける努力をします。また部分分数分解に持ち込むのも常道です。この場合は、分母を平方完成させて、 $1/(x^2 + 1)$ の形に持ち込みます。

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6x + 19 &= 2 \left( x^2 + 3x + \frac{19}{2} \right) = 2 \left( \left( x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{19}{2} \right) = 2 \left( \left( x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{29}{4} \right) \\ &= \frac{29}{2} \left( \left( \frac{4}{29} \right) \left( x + \frac{3}{2} \right)^2 + 1 \right) = \frac{29}{2} \left( \left( \frac{2}{\sqrt{29}} x + \frac{3}{\sqrt{29}} \right)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

ここで  $t = \frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{3}{\sqrt{29}}$  とすると、

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\int \frac{1}{2x^2 + 6x + 19} dx = \frac{2}{29} \int \frac{1}{\left( \left( \frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{3}{\sqrt{29}} \right)^2 + 1 \right)} dx = \frac{2}{29} \int \frac{\frac{\sqrt{29}}{2}}{(t^2 + 1)} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)} dt = \frac{1}{\sqrt{29}} \arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{29}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{3}{\sqrt{29}} \right) + C$$



問題 39  $\int \frac{f'}{f} dx = \log f + C$  を使うパターン

$$\int \frac{x+1}{x^2+3} dx$$

これは、都合よく分子を整理しましょう。

$$\int \frac{x+1}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3} dx + \int \frac{1}{x^2+3} dx$$

最初の項は、分子が分母の微分となっているパターン

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+3) + C$$

ここで  $x^2+3 > 3$  なので、 $\log$  の中身に絶対値はつけていません。

$$x = \sqrt{3}t \text{ とすると、} \frac{dx}{dt} = \sqrt{3}$$

$$\int \frac{1}{x^2+3} dx = \int \frac{1}{3t^2+3} \sqrt{3} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} t + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + C_1$$

与式は

$$\frac{1}{2} \log(x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + C_2 = \frac{1}{2} \log(x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C_2$$

となる。

問題 38  $\int \frac{f'}{f} dx = \log f + C$  を使うパターン

$$\int \frac{\tan^2 x}{\sin x} dx$$

これも分子を分母の微分の形になると気づけば簡単ですね。

$$\int \frac{\tan^2 x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \log \cos^2 x + C$$

問題 40  $\int \frac{f'}{f} dx = \log f + C$  を使うパターン 都合よく変形

$$\int \frac{5x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1} dx$$

ここは分母を因数分解して、都合よく部分分数分解をしてみましょう。

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\frac{5x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1} = \frac{5x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

ここで、部分分数にしたときに、分子が分母の微分になる形を想定します。

$$\frac{5x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B(2x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

として、A と B を決定します。

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B(2x + 1)}{x^2 + x + 1} = \frac{Ax^2 + Ax + A + 2Bx^2 - Bx - B}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(A + 2B)x^2 + (A - B)x + A - B}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

よって、A は 3、B は 1 となります。

$$\frac{5x^2 + 2x + 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{3}{x - 1} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\int \frac{5x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1} dx = \int \left( \frac{3}{x - 1} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right) dx = 3 \log|x - 1| + \log(x^2 + x + 1) + C$$

ここで

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

より、第 2 項の  $\log$  の中身は正であるため絶対値ではなくカッコとしています。

問題 41  $\int \frac{f'}{f} dx = \log f + C$  を使うパターン

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$$

これは分母分子に $e^x$ をかけて、部分分数に分解するといいいですね。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx &= \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)(e^x - 1)} dx \\ &= \int \frac{e^x}{2} \left( \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x - 1} \right) dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \log(e^x + 1) - \frac{1}{2} \log|e^x - 1| + C \end{aligned}$$

指数関数による分数はこのパターンが多いです。

問題 42  $\int \frac{f'}{f} dx = \log f + C$  を使うパターン

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

この問題は問題 5 の  $\int \tan x dx$  の積分問題と同じですが、これは分子が分母の微分パターンの問題ともいえます。分母の  $\cos x$  を微分すると  $-\sin x$  になりますので、次のように積分系を推定できます。

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + C$$

問題 43 定積分 基本

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx$$

区間が決まっている積分を定積分といいます。

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^1 = \frac{1}{3} + 1 - \left( -\frac{8}{3} \right) - (-2) = 6$$

問題 44 定積分 基本

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$$

原関数は  $x=0$  に対して対称であり、**偶関数**とといいます。

偶関数は  $f(x)=f(-x)$  が成り立ちます。

積分区間が正負対称区間である場合は、次のように  $0$  で折り返して  $2$  倍して求めることができます。

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = 2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx = 2 \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

**奇関数**  $f(x)=-f(-x)$  の場合は積分区間が正負対称のであるとき  $0$  となります。

問題 45 **定積分** **基本**

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx$$

この区間積分は電気回路の電力計算でもよく使います。

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx = \left[ -\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\pi} = 0$$

問題 46 **広義積分**

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

このように積分区間の一部が発散している積分を広義積分といいます。この場合は次のように書き替えて極限をとします。

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

問題 47 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

このように積分区間において定義されていない範囲がある場合も広義積分になります。ここでは  $x=0$  のときに原関数は発散します。これもつぎのように区間を決めて極限を取ることにします。

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +0} \int_b^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +0} [\log x]_b^1 = \lim_{b \rightarrow +0} (0 - \log b) = \infty$$

この積分は発散します。

問題 48 広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

これも積分区間に発散がありますので、広義積分になります。この場合は次のように求めます。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow -0} \int_{-1}^b \frac{1}{x^2} dx + \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow -0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^b + \lim_{a \rightarrow +0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^1 = \infty \end{aligned}$$

問題 49 難問

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$$

この問題は  $\sqrt{\quad}$  の中身を平方完成させて  $x^2+a^2$  の形にもちこみます。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} dx$$

$$x + 1 = \tan \theta$$

とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta$$

問題 10 より

$$\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} d\theta + \frac{1}{2} \int \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \log |1 + \sin \theta| - \frac{1}{2} \log |1 - \sin \theta| + C$$
$$= \frac{1}{2} \log \frac{|1 + \sin \theta|}{|1 - \sin \theta|} + C$$

$$x + 1 = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}}$$

$$\text{与式} = \frac{1}{2} \log \frac{\left| 1 \pm \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}} \right|}{\left| 1 \mp \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}} \right|} + C$$

となるが、この積分は原関数が常に正であるため、積分は常に正であるため、 $\log$  の中身は 1 以上であるため、

$$\text{与式} = \frac{1}{2} \log \frac{\left| 1 + \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}} \right|}{\left| 1 - \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}} \right|} + C = \frac{1}{2} \log \frac{\left( 1 + \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}} \right)^2}{\left| \left( 1 - \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}} \right) \right|}$$
$$= \frac{1}{2} \log \frac{\left( 1 + \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}} \right)^2}{\frac{1}{1+(x+1)^2}} + C = \frac{1}{2} \log \left( \sqrt{1+(x+1)^2} + x + 1 \right)^2 + C$$
$$= \log \left| \sqrt{1+(x+1)^2} + x + 1 \right| + C$$

となる。

問題 50 **難問**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx$$

これも根号内を平方完成してみます。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} dx$$

ここで  $x+1 = \cos \theta$  と置きたいところですが、 $x+1$  は  $-\infty$  から  $\infty$  まで取り得ますので、  
 ここは  $x+1 = 1/\cos \theta$  とおいてみます。このとき、

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

つまり

$$dx = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

となる。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1/\cos^2 \theta - 1}} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta &= \int \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin \theta \cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) + C \end{aligned}$$

$$x+1 = 1/\cos \theta$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x+1}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}$$

$$\text{与式} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) + C = \frac{1}{2} \log \left( \frac{x+1 \pm \sqrt{x^2 + 2x}}{x+1 \mp \sqrt{x^2 + 2x}} \right) + C$$

与式は正の値をとるので、 $\log$  の中身は 1 以上でなければならないため、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}}{x+1 - \sqrt{x^2 + 2x}} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x})^2}{(x+1 - \sqrt{x^2 + 2x})(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x})} + C \end{aligned}$$

$\log$  の中の分母は 1 になるので、

$$\text{与式} = \log(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}) + C$$

問題 51

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$$

なんとか積分できる形にするために、次の変形をします。

$$\frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

第二項の積分は簡単そうです。問題は  $\frac{1}{\sin^2 x}$  ですね。

これは  $-1/\tan x$  の微分であることに気づけば大したものですね。

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \cos x} dx &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= -\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x} + C \end{aligned}$$

問題 52

$$\int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2 dx$$

これもびっくりしないで落ち着いて対処しましょう。まず原関数を展開します。

$$\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2 = \tan^2 x + \tan^{-2} x + 2$$

最終項の定数 2 は後で処置します。

$$\tan^2 x + \tan^{-2} x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 2$$

つまり



$$\tan^2 x + \tan^{-2} x + 2 = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\begin{aligned} \int \left( \tan x + \frac{1}{\tan x} \right)^2 dx &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= \tan x - \frac{1}{\tan x} + C \end{aligned}$$

参考までに

$$(\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left( \frac{1}{\tan x} \right)' = \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

問題 53

$$\int \tan^3 x dx$$

さあこれも落ち着いて取り組んでみましょう。

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x dx &= \int \tan x \times \tan^2 x dx = \int \tan x \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \int \tan x \left( \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left( \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \tan x \right) dx \end{aligned}$$

$t = \tan x$  とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$  より

$$\int \left( \frac{\tan x}{\cos^2 x} \right) dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log |\cos x|$$

したがって、

$$\int \tan^3 x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + \log |\cos x| + C$$

問題 54 **難問**

$$\int \frac{x}{1 - \sin x} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1 - \sin x} dx &= \int \frac{x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} dx = \int \frac{x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} dx = \int \left( \frac{x}{\cos^2 x} + x \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx \end{aligned}$$

ここからは部分積分を使います。 $1/\cos^2 x$  の積分は  $\tan x$  であるため、

$$\int \left( \frac{x}{\cos^2 x} \right) dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \log|\cos x| + C$$

$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$  の積分は  $1/\cos x$  であることから

$$\int \left( x \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$\int \frac{1}{\cos x} dx$  ですが、以前解説した通りです。

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

ここで部分分数分解します。

$$\frac{\cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{2} \left( \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx \\ &= \frac{1}{2} \log|1 + \sin x| - \frac{1}{2} \log|1 - \sin x| + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{|1 + \sin x|}{|1 - \sin x|} + C = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C \end{aligned}$$

したがって、

$$\int \frac{x}{1 - \sin x} dx = x \tan x + \log|\cos x| + \frac{x}{\cos x} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C$$

となります。

問題 55

$$\int \frac{2x - 1}{(3x - 2)^3} dx$$

この問題も分母に 3 乗が入っているのが悩ましいです。これも部分分数に分解しますが、この形で分解してみましょう。

$$\frac{2x - 1}{(3x - 2)^3} = \frac{A}{(3x - 2)^2} + \frac{B}{(3x - 2)^3}$$

部分分数は恣意的に分解するのが基本です。このようにすると再合成したときに一次式ができて、二変数がありますから分子の  $2x - 1$  を表現できますね。

$$\frac{A}{(3x - 2)^2} + \frac{B}{(3x - 2)^3} = \frac{A(3x - 2) + B}{(3x - 2)^3} = \frac{3Ax - 2A + B}{(3x - 2)^3} = \frac{2x - 1}{(3x - 2)^3}$$

つまり恒等式として

$$3A = 2$$

$$-2A + B = -1$$

が成り立ちます。ここから  $A = 2/3$ 、 $B = 1/3$  となります。

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 1}{(3x - 2)^3} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{(3x - 2)^2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(3x - 2)^3} dx \\ &= -\frac{2}{9} (3x - 2)^{-1} - \frac{1}{18} (3x - 2)^{-2} + C \end{aligned}$$

問題 56 **難問**

$$\int \frac{1}{1 + x^3} dx$$

難問としてありますが、ここまで学んできた皆さんならもう解き方はピンとくるかとおもいます。分母を因数分解して部分分数に分解します。

因数分解の公式より

$$1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$$

となることから、

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2}$$

と分解できるかどうか試してみましょう。この式を再合成すると、

$$\frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C-A)x + A+C}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

となり、この恒等式が成り立つためには、

$$A+B=0$$

$$B+C-A=0$$

$$A+C=1$$

となり、これらを説くと  $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{2}{3}$  となる。

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{-x+2}{1-x+x^2} \right)$$

この式において、第1項は簡単に積分できます。第2項はもっと簡単にしましょう。すなわち分母の微分が分子になるようにします。

$$\frac{-x+2}{1-x+x^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{2x-1}{1-x+x^2} + \frac{3}{1-x+x^2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{1-x+x^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-x+x^2}$$

一旦、与式に戻りましょう。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{1-x+x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|1+x| - \frac{1}{6} \log|1-x+x^2| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x+x^2} dx \end{aligned}$$

最後の項を積分していきます。

$$\int \frac{1}{1-x+x^2} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx$$

ここで  $\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \theta$  とする。

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} = \cos^2 \theta$$

$\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \theta$  の両辺を  $\theta$  で微分すると

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

となる。

$$\frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \cos^2 \theta \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{1-x+x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|1+x| - \frac{1}{6} \log|1-x+x^2| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

$1-x+x^2 > 0$  であるため

$$\text{与式} = \frac{1}{3} \log|1+x| - \frac{1}{6} \log(1-x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

問題 57 **難問**

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx$$

戦略として、 $x^2 = \tan \theta$  とする方法が思いつきますが、先で行き詰まります。

この場合は部分分数分解を試みます。 $1+x^4$  を因数分解しましょう。

$1+x^4$  をゼロにする  $x$  は複素数になりますので、2次式の積で分解します。

$$\begin{aligned} 1+x^4 &= (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1) \\ &= x^4 + (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 + (a+b)x + 1 \end{aligned}$$

以上より

$$a+b=0 \quad ab+2=0$$

より  $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$  と求められる。

$$1+x^4 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$\frac{1}{1+x^4}$  を部分分数に分解するとき、簡単に積分できる分数として次の4つの関数を仮定する。

$$\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} \quad \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \quad \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \quad \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

4つ仮定したのはこれら分数をまとめて分子に4次式がでてくるため、どうしても異なる（一次独立な）分数が4つ必要である。

$$\frac{1}{1+x^4} = a_1 \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + a_2 \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + a_3 \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + a_4 \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

とにおいて係数  $a_1 \sim a_4$  を求めてみます。

右

辺

$$\begin{aligned} & \frac{a_1(2x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+1) + a_2(2x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}x+1) + a_3(x^2-\sqrt{2}x+1) + a_4(x^2+\sqrt{2}x+1)}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} \\ &= \frac{(2a_1+2a_2)x^3 + ((-\sqrt{2})(a_1+a_2) + a_3+a_4)x^2 + (-\sqrt{2}a_3+\sqrt{2}a_4)x + \sqrt{2}a_1 - \sqrt{2}a_2 + a_3 + a_4}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} \\ & \quad 2(a_1+a_2) = 0 \\ & \quad -\sqrt{2}a_1 + \sqrt{2}a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ & \quad -\sqrt{2}a_3 + \sqrt{2}a_4 = 0 \\ & \quad \sqrt{2}a_1 - \sqrt{2}a_2 + a_3 + a_4 = 1 \end{aligned}$$

以上の連立方程式を解くと、

$$a_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad a_2 = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \quad a_3 = a_4 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^4} dx &= \int \left( \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log|x^2+\sqrt{2}x+1| \\ & \quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log|x^2-\sqrt{2}x+1| + \frac{1}{4} \sqrt{2} \arctan(x^2+\sqrt{2}x+1) \\ & \quad + \frac{1}{4} \sqrt{2} \arctan(x^2-\sqrt{2}x+1) + C \end{aligned}$$

問題 58 **難問**

$$\int \sqrt[3]{\tan x} dx$$

かなりの難問ですが、基本は一緒になります。

まずは  $\tan x = t^3$  としましょう。両辺を微分して、

$$\frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{dt} = 3t^2$$

つまり

$$dx = \cos^2 x \cdot 3t^2 dt$$

$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$  より

$$dx = \cos^2 x \cdot 3t^2 dt = \frac{3t^2}{1+t^6} dt$$

よって与式は

$$\int \sqrt[3]{\tan x} dx = 3 \int t \times \frac{t^2}{1+t^6} dt = 3 \int \frac{t^3}{1+t^6} dt$$

ここでさらに置換をこころみます。

$$t^2 = u$$

としてみます。

$$\frac{du}{dt} = 2t = 2\sqrt{u}$$

$$dt = \frac{1}{2} t du = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

$$3 \int \frac{t^3}{1+t^6} dt = \frac{3}{2} \int \frac{u}{1+u^3} du$$

ようやく見通しがよくなりました。

$$1 + u^3 = (1+u)(1-u+u^2)$$

と因数分解できます。部分分数分解を試みます。

$$\frac{u}{1+u^3} = \frac{A}{1+u} + \frac{B(2u-1)}{1-u+u^2} + \frac{C}{1-u+u^2}$$

としてみます。

これを再合成すると

$$\frac{(A+2B)u^2 + (-A+B+C)u + A-B+C}{(1+u)(1-u+u^2)} = \frac{u}{(1+u)(1-u+u^2)}$$

となり、係数比較より

$$A = -\frac{1}{3} \quad B = \frac{1}{6} \quad C = \frac{1}{2}$$

となる。

$$\frac{3}{2} \int \frac{u}{1+u^3} du = \frac{3}{2} \int \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+u} + \frac{1}{6} \cdot \frac{(2u-1)}{1-u+u^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-u+u^2} \right) du$$

$$= -\frac{1}{2}\log|1+u| + \frac{1}{4}\log|1-u+u^2| + \frac{3}{4}\int \frac{1}{1-u+u^2} du$$

最後の項は平方完成してもとめます。

$$\int \frac{1}{1-u+u^2} du = \int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} du$$

分数関数の積分の公式  $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$   $a$  は定数

を使います。

$$\int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} u - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$u \rightarrow t$

与式=

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\log|1+u| + \frac{1}{4}\log|1-u+u^2| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} u - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= -\frac{1}{2}\log|1+t^2| + \frac{1}{4}\log|1-t^2+t^4| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} t^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

$t \rightarrow x$

与式=

$$= -\frac{1}{2}\log \left| 1 + \tan^{\frac{2}{3}} x \right| + \frac{1}{4}\log \left| 1 - \tan^{\frac{2}{3}} x + \tan^{\frac{4}{3}} x \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{\frac{2}{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$\log$  の中は正で確定していますので、答えはこうなります。

$$-\frac{1}{2}\log \left( 1 + \tan^{\frac{2}{3}} x \right) + \frac{1}{4}\log \left( 1 - \tan^{\frac{2}{3}} x + \tan^{\frac{4}{3}} x \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{\frac{2}{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

問題 59 広義積分・ベータ関数・ガンマ関数・そしてガウス積分への布石

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

この関数は、ベータ関数の一つです。ベータ関数  $B(p, q)$  はつぎのようにあらわされます。ただし、 $p, q > 0$  となります。



$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

この関数の  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  が与式になります。さて、この積分は高校数学の範囲で求めることができます。

この積分において中の関数が  $x=0$  の時に発散してしまいますが、このような積分を広義積分と言って、次のように計算することとします。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^s \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

与式において、置換積分を試みますが、ここは  $x = \cos^2 \theta$  とします。変数の変化範囲はつぎのようになります。

$$\begin{array}{lll} x & t & \rightarrow s \\ \theta & \arccos(\sqrt{t}) & \rightarrow \arccos(\sqrt{s}) \end{array}$$

積分要素の変換をします。

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\cos\theta \sin\theta$$

$$dx = -2\cos\theta \sin\theta d\theta$$

したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^s \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\arccos(\sqrt{t})}^{\arccos(\sqrt{s})} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)}} \cdot -2\cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -2 \left( \int_{\arccos(\sqrt{t})}^{\arccos(\sqrt{s})} d\theta \right) \right\} = \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \{-2[\arccos(\sqrt{s}) - \arccos(\sqrt{t})]\} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

#### 問題 61 **ベータ関数**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

この関数は、ベータ関数の一つです。ベータ関数  $B(p, q)$  はつぎのようにあらわされます。ただし、 $p, q > 0$  となります。

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

この関数の  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  が与式になります。さて、この積分は高校数学の範囲で求めることができます。

この積分において中の関数が  $x=0$  の時に発散してしまいますが、このような積分を広義積分と言って、次のように計算することとします。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^s \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

与式において、置換積分を試みますが、ここは  $x = \cos^2 \theta$  とします。変数の変化範囲はつぎのようになります。

$$\begin{array}{lll} x & t & \rightarrow s \\ \theta & \arccos(\sqrt{t}) & \rightarrow \arccos(\sqrt{s}) \end{array}$$

積分要素の変換をします。

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\cos \theta \sin \theta$$

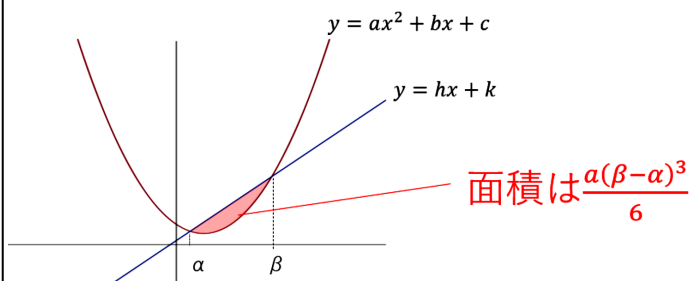
$$dx = -2\cos \theta \sin \theta d\theta$$

したがって、

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^s \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\arccos(\sqrt{t})}^{\arccos(\sqrt{s})} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}} \cdot -2\cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -2 \left( \int_{\arccos(\sqrt{t})}^{\arccos(\sqrt{s})} d\theta \right) \right\} = \lim_{s \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow 0} \{-2[\arccos(\sqrt{s}) - \arccos(\sqrt{t})]\} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

問題 62 **ベータ関数 1/6 公式**

次の直線と2次関数に囲まれた面積を計算しなさい。



**1/6公式の証明**

この問題は1/6公式と呼ばれるものです。結果は公式として覚えておきましょう。  
面積を  $S$  とすれば

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (hx + k - ax^2 - bx - x) dx$$

を計算すればよいのですが、大変面倒なことになります。この中身を0とした時の方程式は解として  $\alpha$  と  $\beta$  を持ちますので、

$$hx + k - ax^2 - bx - x = -a(x - \alpha)(x - \beta)$$

として計算しましょう。この形はベータ関数の一つです。

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} -a(x - \alpha)(x - \beta) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta) dx \\ &= -a \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{(\alpha + \beta)x^2}{2} + a\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} = -a \left( \frac{\beta^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3} - \frac{(\alpha + \beta)\beta^2}{2} + \frac{(\alpha + \beta)\alpha^2}{2} - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \right) \\ &= -a \left( -\frac{\beta^3}{6} + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2\beta}{2} \right) = -\frac{a}{6} (\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3) \\ &= -\frac{a(\alpha - \beta)^3}{6} = \frac{a(\beta - \alpha)^3}{6} \end{aligned}$$

この式は上に凸の二次関数にも当てはまりますので、一般化して次のように書かれます。

二次関数と直線で囲まれた面積  $S = \frac{|a|(\beta - \alpha)^3}{6}$  ( $a$ は二次関数の $x^2$ の係数)

(1/6公式)

別解) 展開せずに求めてみましょう。置換積分で解きます。

$$\begin{aligned}
S &= -a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -a \left[ \frac{(x - \alpha)^2}{2} (x - \beta) \right]_{\alpha}^{\beta} + a \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(x - \alpha)^2}{2} dx \\
&= -a \left[ \frac{(x - \alpha)^2}{2} (x - \beta) \right]_{\alpha}^{\beta} + a \left[ \frac{(x - \alpha)^3}{6} \right]_{\alpha}^{\beta} \\
&= \frac{a(\beta - \alpha)^3}{6}
\end{aligned}$$

問題 63 **ベータ関数の積分 積分値が階乗で表される**

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad p, q \text{ は自然数}$$

これは置換積分を用いて計算します。

$$\begin{aligned}
B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \left[ \frac{x^p (1-x)^{q-1}}{p} \right]_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx \\
&= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx = \frac{q-1}{p} B(p+1, q-1)
\end{aligned}$$

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p} B(p+1, q-1) = \frac{(q-1)(q-2)}{p \cdot (p+1)} B(p+2, q-2) = \dots$$

$$= \frac{(q-1)!}{p \cdot (p+1) \cdots (p+q-2)} B(p+q-1, 1)$$

$$= \frac{(q-1)!}{p \cdot (p+1) \cdots (p+q-2)} \int_0^1 x^{p+q-2} dx$$

$$= \frac{(q-1)!}{p \cdot (p+1) \cdots (p+q-2)} \left[ \frac{x^{p+q-1}}{p+q-1} \right]_0^1$$

$$= \frac{(p-1)! (q-1)!}{(p+q-1)!}$$

なおガンマ関数は整数を引数とするときに、 $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることから

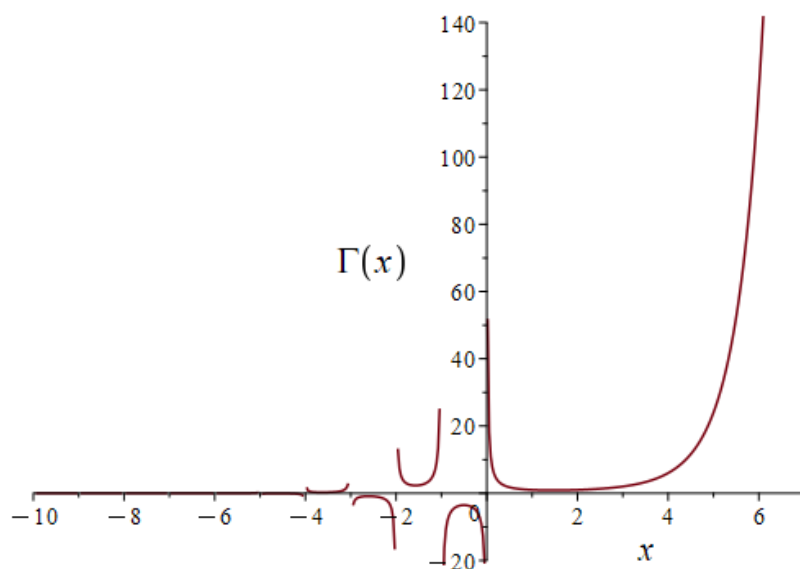
$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

と表すことができ、ベータ関数とガンマ関数の関係式とされています。この関係は  $p, q$  が整数だけではなく、正の実数の範囲で成り立つことも明らかにされています。

問題 64 **ガンマ関数 積分値に階乗がでてくる**

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad n \text{は自然数}$$

この関数はガンマ関数といって、階乗の概念を表す積分として、大学課程の数学の初歩ででてきます。問題では  $n$  が自然数でしたが、実際には正の実数、複素数（実部が正）でも使用することができます。この問題の積分は、広義積分が入りますが、高校生の方でも理解できるとおもいます。このガンマ関数は  $n$  を実数  $x$  に置き換えてグラフにするとこのような形になります。



これは置換積分を使います。

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s t^{n-1} e^{-t} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [-t^{n-1} e^{-t}]_0^s + \lim_{s \rightarrow \infty} (n-1) \int_0^s t^{n-2} e^{-t} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} [-t^{n-1} e^{-t}]_0^s + (n-1) \Gamma(n-1) \end{aligned}$$

ここで第一項を評価します。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [-t^{n-1} e^{-t}]_0^s = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-s^{n-1}}{e^s}$$

これはロピタルの定理を使って求めます。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{g(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f'(s)}{g'(s)}$$

ロピタルの定理が使えるのは、 $\frac{f(s)}{g(s)}$ がそれぞれ微分可能で、連続かつ、不定形である場

合です、 $\frac{-t^{n-1}}{e^t}$ は分母分子を、それぞれ微分を繰り返していくと、分母はかわりませんが、分子は定数になります。 $e^t$ は常に $\infty$ に発散しますので、この極限はゼロであることがわかります。

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

であることが示されました。

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(1)$$

$\Gamma(1)$ を評価します。

$$\Gamma(1) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-t} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^s = -e^{-\infty} + 1 = 1$$

よって、

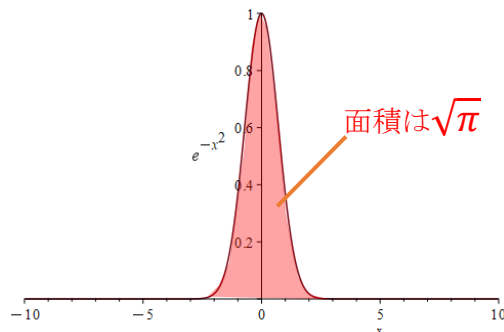
$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}, n > 1$$

が示されました。

#### 問題 64 ガウス積分の計算

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

これは高校数学ではなく、大学課程になりますが、ガウス積分と言われていて、工学、物理の様々なところで使う積分になりますので、答えだけでも覚えておいていただければとおもいます。この $f(x) = e^{-x^2}$ はガウス関数とよばれ、偏差値を計算するときの正規分布もこの関数の一種になります。ガウス関数をグラフにしてみると、次のようになります。



この積分の原始関数は初等関数では表せませんが、数値積分はできます。また、次の数値積分で定義される関数を誤差関数といい、筆者の分野では半導体製造の不純物の

拡散を説明するのに活用されたりしています。この関数はエクセルにおいて標準関数として搭載されています。

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

さて、本題に戻りましょう。与式は置換積分ではできません。そこで次のような計算を考えます。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

として

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

とします。

さらに式を整理します。(フビニの定理)

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

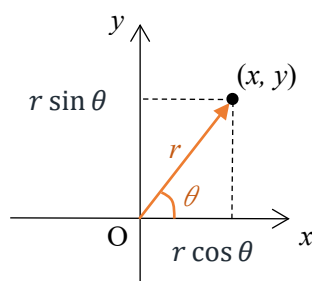
この変形には数学的な考察が必要ですが省略します。詳しくは、[ガウス積分 - Wikipedia](#)をご覧ください。

この式の形は、二重積分という二変数の積分になります。これを解くために次のように置換をします。

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

この置き換えは空間で考えるとわかりやすいです。



すると、 $x^2 + y^2 = r^2$ となります。変数の範囲を確かめましょう。

$$x \quad -\infty \rightarrow \infty$$

$$y \quad -\infty \rightarrow \infty$$

$$\begin{array}{l} r \quad 0 \rightarrow \infty \\ \theta \quad 0 \rightarrow 2\pi \end{array}$$

次に積分要素の  $dx dy$  を  $dr d\theta$  に代えます。このときにヤコビアン  $J$  を補正係数としてつけます。

$$dx dy = J dr d\theta$$

なぜそうなるかの説明は次の機会にさせていただきます。ヤコビアン  $J$  は次のようにあらわされます。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$\frac{\partial x}{\partial r}$  は偏微分として、 $x$  中の  $r$  以外の変数はすべて定数であるとして微分するという意味になります。

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \quad \text{となり、}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

となります。

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \pi \end{aligned}$$

したがって

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

となります。

別解： ガンマ関数を使って解きます。 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  を考えます。



$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$$

となります。ここで  $t = x^2$  とくと

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

となり、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} x^{-1} e^{-x^2} 2x dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

となります。求める  $I$  は元関数が偶関数ですので、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

となります。ガンマ関数とベータ関数の関係、

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

これは実数の範囲でも成り立つので、

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

となります。  $\Gamma(1) = 0! = 1$  より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

の関係となります。

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

であることから、これは  $x = \cos^2 x$  と置換して解くことができ、  $\pi$  となります。つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}$$

となります。

問題 64 **二重積分の基礎**

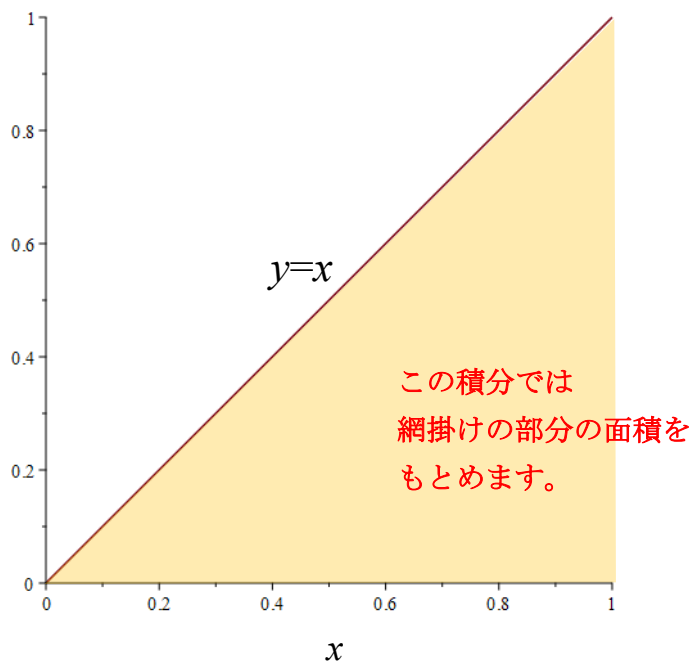
$$\iint xy^2 dx dy \quad \text{但し } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

今までは一つの変数をもとに積分を計算してきました。ここからはある関数で規定される面積や体積をもとめるにつかる積分を勉強していきます。大学課程になりますが、高校生の方でもわかるように説明していきます。

その前に簡単な説明から。

$$s = \int x dx \quad \text{但し } 0 \leq x \leq 1$$

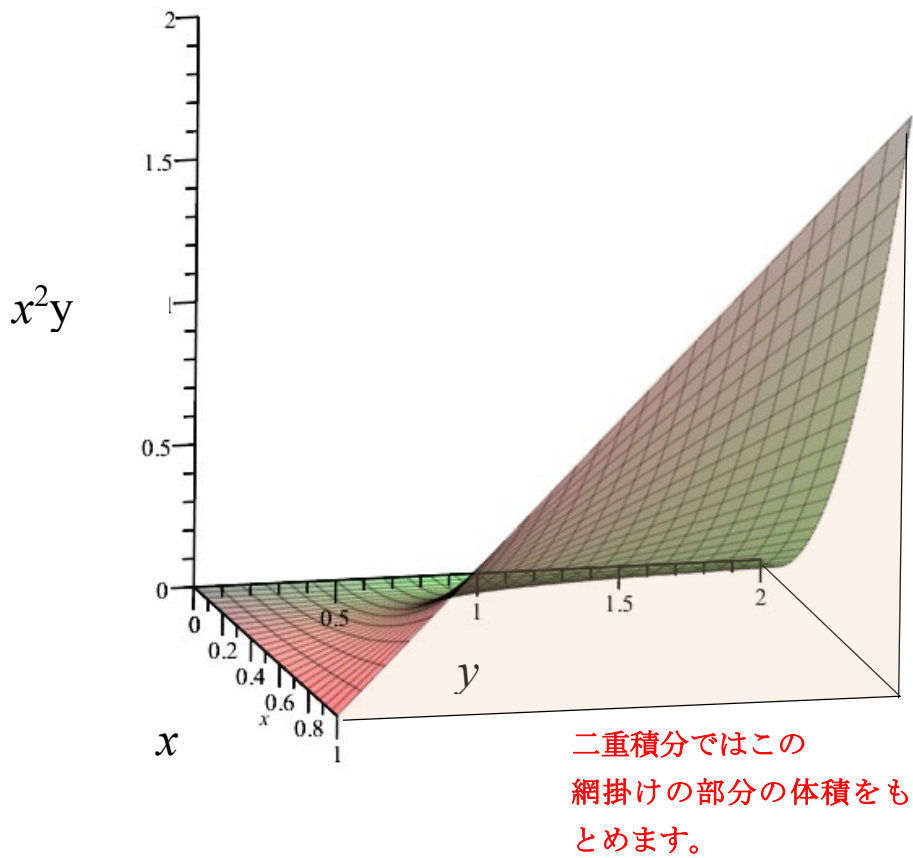
とされた場合、この積分値 $S$ は図に示される部分の面積に対応します。



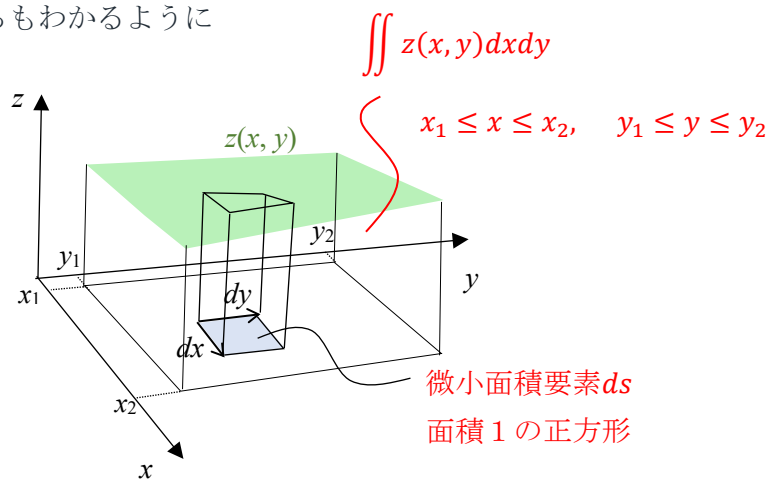
すなわち、積分値は $x$ 軸との挟まれた部分の面積になります。一方、二重積分の場合は、表題の問題において

$$z = x^2 y$$

なる方程式を $xyz$ 座標で表した時に、標記の範囲の $xy$ 平面と関数 $x^2 y$ で囲まれる体積を表します。参考まで、Mapleで書いた三次元プロットを表示します。



これは、次の図からもわかるように



$dx dy$ は  $xy$  平面に形成される微小面積要素で  $ds$ とも書かれますが、面積 1 の面積要素になります。これに積分内部の関数の値をかけることで、微小面積要素上の立体の体積となり、積分範囲でたしあわせることで、 $xy$  平面上の制限範囲の立体の体積が求められます。

二重積分はある条件下での面積や体積をもとめるに有効な方法です。さて本題にもどりますが、

$$\iint xy^2 dx dy \quad \text{但し } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

つぎのように書き換えてみましょう。

$$\iint xy^2 dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 xy^2 dx \right) dy$$

括弧の中の積分を求めるときに、積分要素の  $dx$  に係る  $x$  以外の変数  $y$  は定数として扱います。

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} y^2 \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy = \left[ \frac{y^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

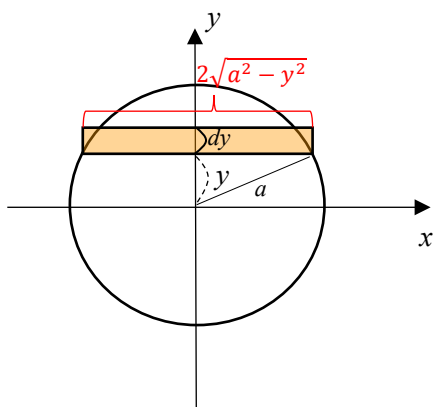
となります。

#### 問題 65 二重積分の基礎

半径  $a$  の円の面積が  $\pi a^2$  になることを示さない。

$$\iint_D dx dy \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

この問題は二重積分の練習ですが、半径  $a$  の円の面積は高校生の範囲でも解くことができます。次の図をご覧ください。



上記の図形を考えて色で網掛け下部分を積分していけば円の面積  $S$  を求めることができそうです。

$$S = \int_{-a}^a 2\sqrt{a^2 - y^2} dy = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

ここで  $y = a \sin \theta$  とします。

$$\frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$$

変数の変化の範囲ですが、

$$y \quad 0 \rightarrow a$$

$$\theta \quad 0 \rightarrow \pi/2$$

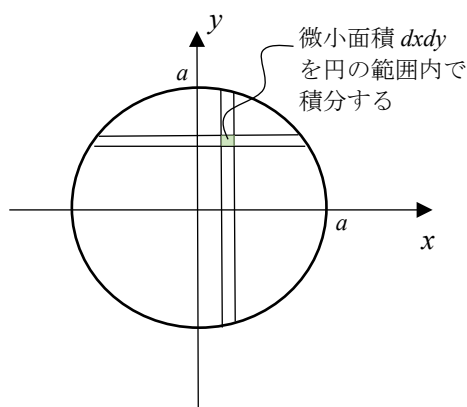
$$S = 4 \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \theta \, d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \, d\theta = 4a^2 \left[ \frac{-\sin 2\theta}{4} + \frac{1}{2}\theta \right]_0^{\pi/2} = \pi a^2$$

このような形で円の公式が求まります。

それでは二重積分で解いてみましょう。

$$\iint_D dx dy \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

こちらの意味ですが、



微小面積  $dx dy \times 1$  の体積、すなわち面積を円の範囲内で積分することになります。積分範囲を次のように書き換えます。

$$D \in \{x^2 + y^2 \leq a^2\} \rightarrow \{-a \leq y \leq a, -\sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}\}$$

$x$  は  $y$  の範囲で規定されますので、この場合  $x$  から積分します。

$$\iint_D dx dy = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} dx dy = \int_{-a}^a 2\sqrt{a^2 - y^2} dy = \pi a^2$$

(二重積分別解)

この場合は積分範囲が円なので、

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

と置きます。これを二次元の極座標形式といいます。すると積分範囲は

$$r \quad 0 \sim a$$

$$\theta \quad 0 \sim 2\pi$$

となります。

すると出題の二重積分は次のように書けます。

$$\iint_D dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a J dr d\theta$$

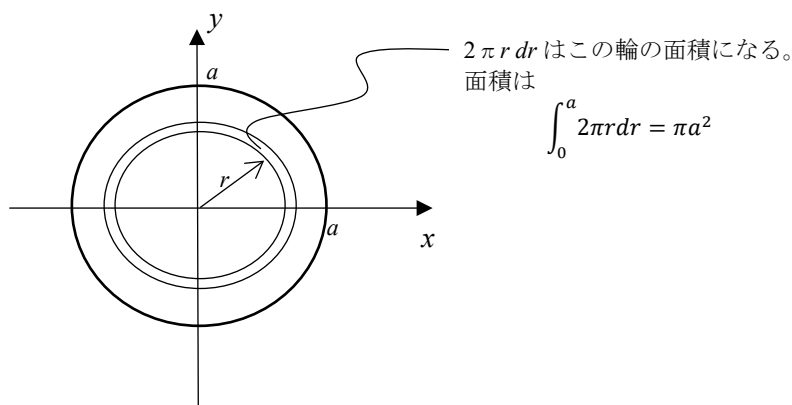
ここで  $J$  とはヤコビアンと呼ばれるもので、変数を変換したときに  $dx dy$  の微小面積と  $dr d\theta$  の微小面積を合わせるための係数になります。このヤコビアンは次の式で計算されます。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

二次元極座標に変換したときには、単純に  $r$  を掛けるとおぼえておいてもよいでしょう。

$$\iint_D dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^a d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{a^2}{2} \times 2\pi = \pi a^2$$

この積分の意味は次のように考えることができます。



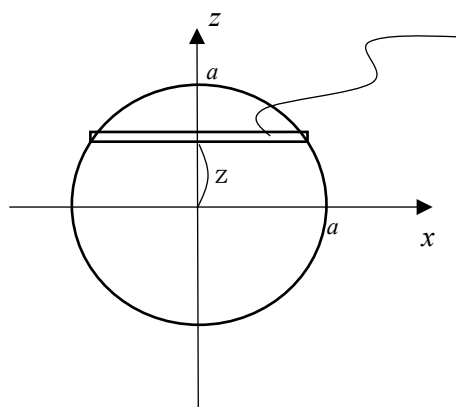
簡単な例をもとに練習してみました。次回は球の体積をもとめていきます。

問題 66 **二重積分の基礎**

半径  $a$  の球の体積が  $\frac{4}{3}\pi a^3$  になることを示しなさい。

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

ここでは、半径  $a$  の球の体積を求めましょう。まずは高校課程でもとめてみます。これは、球の断面を  $xz$  平面に当てはめたものです。

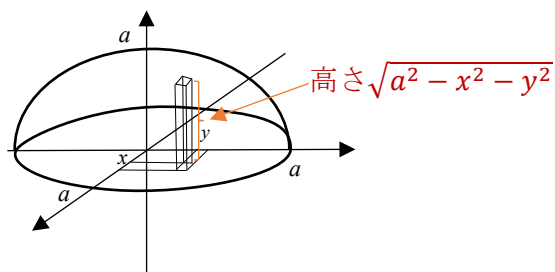


高さ  $dz$  の円盤と考えます。  
このとき円盤の体積は  
 $\pi(a^2 - z^2)dz$   
になります。

そこで球の体積  $V$  は次のように求められます。

$$V = \int_{-a}^a \pi(a^2 - z^2) dz = \left[ \pi \left( a^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \right]_{-a}^a = \pi \left( a^3 - \frac{a^3}{3} - (-a^3) + \left( -\frac{a^3}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} \pi a^3$$

球の体積を二重積分の練習問題として求めてみましょう。



このようにして考えると半球の体積  $V/2$  は次のように与えられます。

$$\frac{V}{2} = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

これを解くために、前問でも行った変数変換をします。

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

と置きます。これを二次元の極表形式といいます。すると積分範囲は

$$r \quad 0 \sim a$$

$$\theta \quad 0 \sim 2\pi$$

となります。

すると出題の二重積分は次のように書けます。

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} J dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} J dr d\theta \end{aligned}$$

$J$ はヤコビアンで、変数を変換したときに $dx dy$ の微小面積と $dr d\theta$ の微小面積を合わせるための係数になります。このヤコビアンは次の式で計算されます。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

二次元極座標に変換したときには、単純に $r$ を掛けるとおぼえておいてもよいでしょう。

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta = 2\pi \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

つまり球の体積は $\frac{4}{3}\pi a^3$ になります。

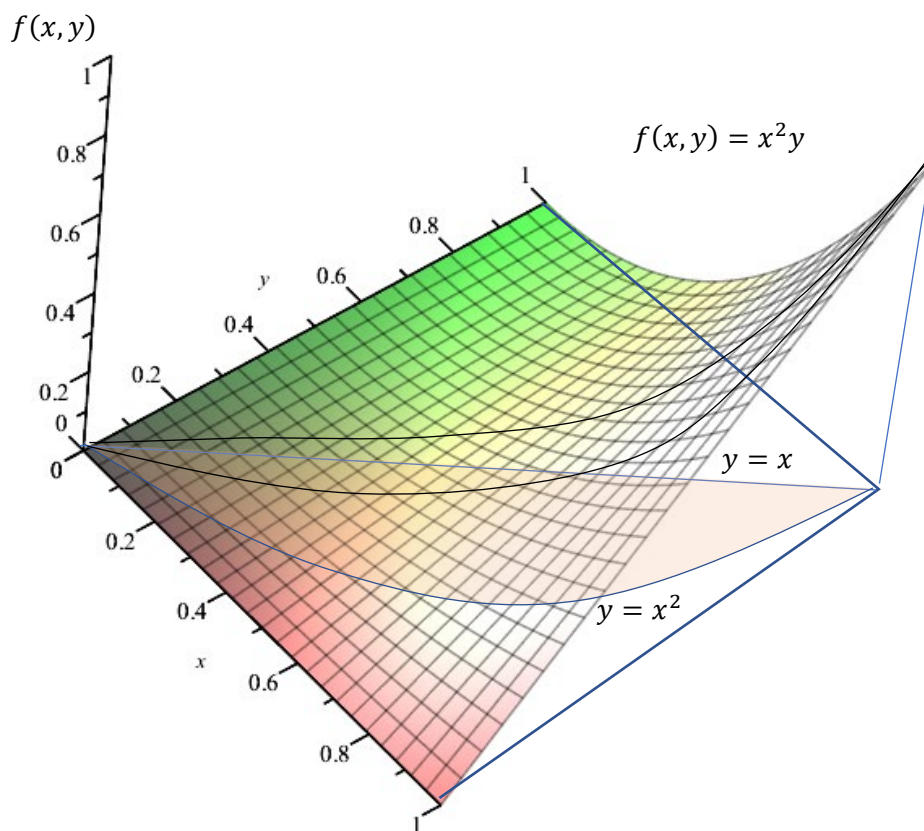


問題 67 **二重積分**

$$\iint_D x^2 y dx dy \quad D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, x^2 < y < x\}$$

この積分範囲を図示するとつぎのようになります。

二重積分を使うと、複雑な数値で表される領域の体積を積分としてもとめることができます。 $xy$ 平面において、 $y = x^2$ と $y = x$ で囲まれる領域と、 $f(x, y) = x^2 y$ の曲面で挟まれた立体の体積を求めることになります。



この積分は次のように書き表されます

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^x x^2 y dy dx$$

この場合は、 $y$ は $x$ で示される範囲なので、最初に $y$ から積分します。逆だと、積分後に変数 $x$ が被積分関数として残ってしまいますので、それを避けます。

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x x^2 y dy dx = \int_0^1 \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 - x^6) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{35}$$

問題 68 **テーラー展開を積分に使う**

テイラー展開を使って次の積分を示しなさい。

$$\sin x + C = \int \cos x \, dx$$

これは単純には $\sin x$ の導関数は次のように求めます。

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x (-\sin^2 h)}{h(1 + \cos h)} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

であることを利用すれば

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x (-\sin^2 h)}{h(1 + \cos h)} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x$$

となります。

しかしここは題意を汲んでテイラー展開を使って $\cos x$ の積分が $\sin x + C$ になることを確かめます。

テイラー展開は実数関数がある実数 $a$ の周りで多高次関数で表すことができるというものです。ある関数 $f(x)$ を考えると、 $x = a$ の周りで次のように展開できます。

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

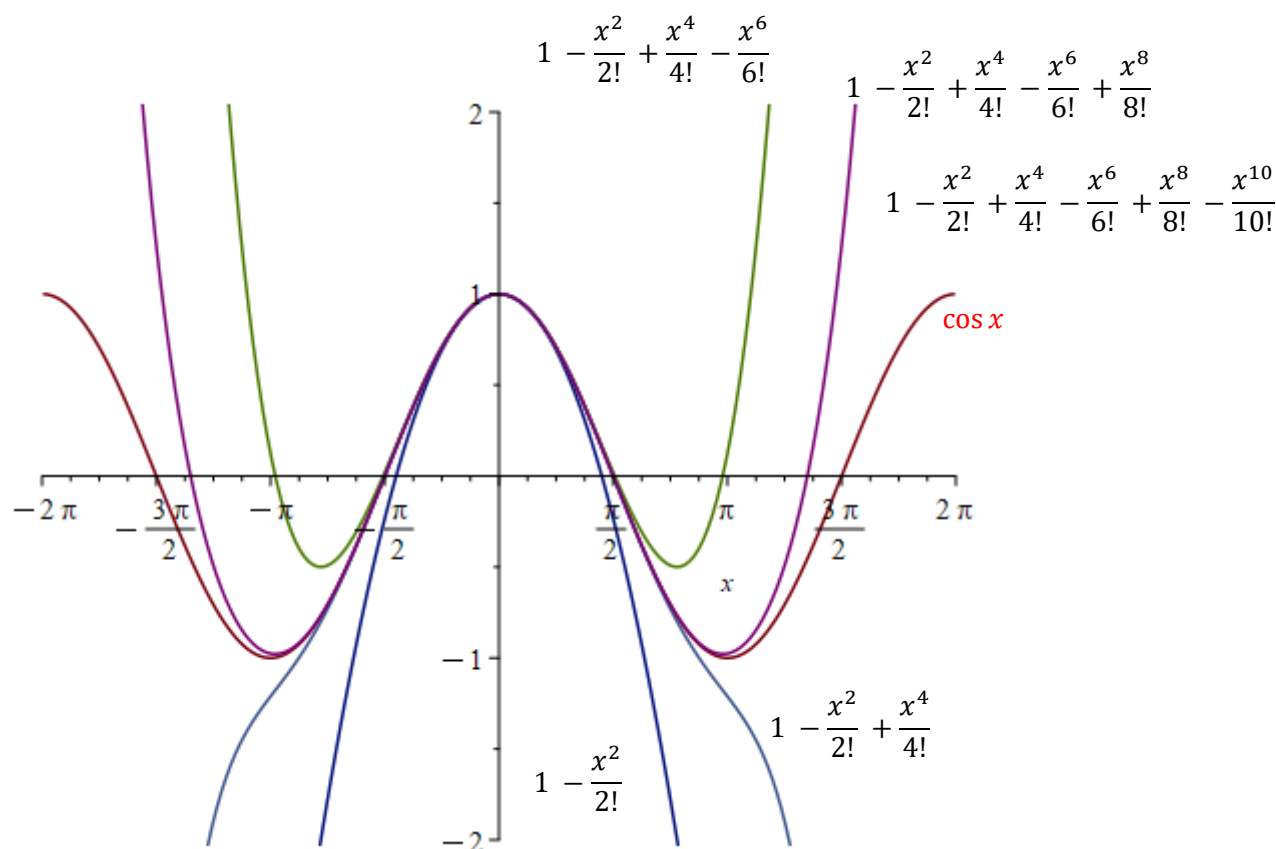
シンプルに考えれば、右項を $n$ 階に微分して、 $x = a$ を代入しても必ず等式が成り立つことが分かります。さて、題意に出てくる $\cos x$ を $x = 0$ の周りでテーラー展開してみます。

$$\cos' x = -\sin x \quad \cos'' x = -\cos x \quad \cos''' x = \sin x \quad \cos'''' x = \cos x$$

より

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

と展開できます。この展開を無限に行えば左項との誤差が小さくなりますが、実際に使うまでは何番目かまでと決めて使うことになります。せっかくなのでどの程度一致するか実験してみましょう。



こんな感じです。展開項を多くとるほど  $x = 0$  をから離れた位置での合致度があがってくるのがわかります。これを見ていると、 $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$  のように限られた範囲では、 $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  を近似で使うのはありかもしれません。現在コンピューターの性能が非常によくなって、数学関数を自由にプログラミングに組み込んで計算することは容易ですが、非常にタイニーな目盛空間の環境、例えば PIC などのマイコンで、高速で三角関数を計算するのであれば、テイラー展開に基づく多高次近似関数を使うことは大変有効です。

本題に戻りましょう。同じように  $\sin x$  も  $x = 0$  周りでテイラー展開してみましょう。このようになります。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

さて

$$\begin{aligned} \int \cos x \, dx &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 2!} + \frac{x^5}{5 \cdot 4!} - \frac{x^7}{7 \cdot 6!} + \frac{x^9}{9 \cdot 8!} - \frac{x^{11}}{10 \cdot 10!} + \dots + C \\ &= \sin x + C \end{aligned}$$

となり、等式が示されました。これは厳密な証明ではありませんが、テイラー展開を使うと積分困難な関数も積分できることがわかります。これはいろいろ面白そうなことに使えそうです。