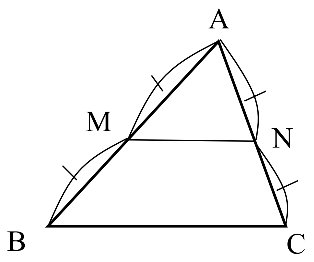
三角形の性質

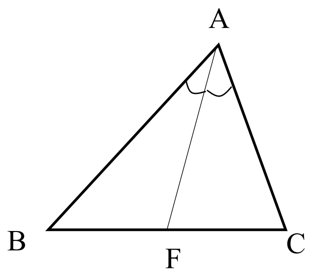
三角形の問題は毎年のように共通テストで出題されていますが、三角形に限らず図形の性質を使うことで、様々な求解問題をエレガントに解くことができます。ここは、様々な三角形の性質を復習していきましょう。

1．中点連結の定理



ABの中点をM、ACの中点をNとすると、
MNとBCは平行　MN//BC
線分MNは線分BCの半分の長さ　MN＝1/2BC

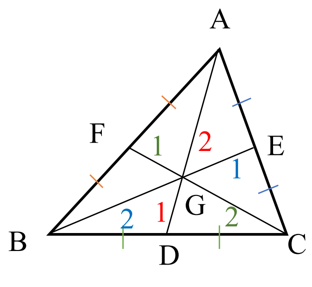
2.　内角の二等分線



∠Aの角度二等分線を引いて、底辺との交点をFとするときに、ABとACの比はBFとFCの比に等しい。

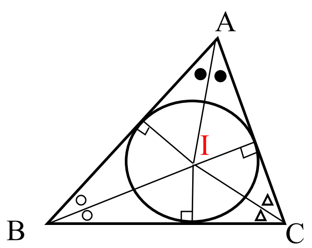
AB：AC=BF:BC

3.　三角形の重心



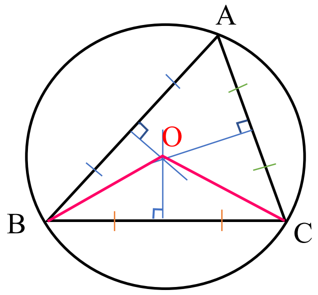
三角形の頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線をひく。それぞれの線の交点は1点で交わり、それを重心という。重心は線の２：１の内分点になる。(**重心は辺二等分線と頂点の交点**)

4.　三角形の内心



三角形の内接円の中心を内心という。内心Iと各頂点との線を考えるとき、その線は頂点の角を2等分する線となる。内接円の接点と内心Iと各辺との角度は90°になる。
(**内心は二等分角線の交点**)

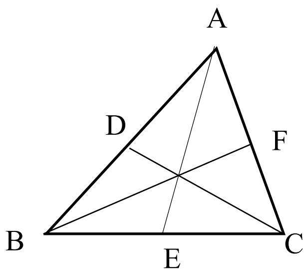
5. 三角形の外心



円に内接する三角形があるとき、円の中点が三角形の外心となる。このとき、各辺の二等分垂線の交点が外心となる。
(外心は各辺の二等分垂線の交点)

中心角の定理
中心角は円周角の二倍である。
2∠BAC＝∠BOC

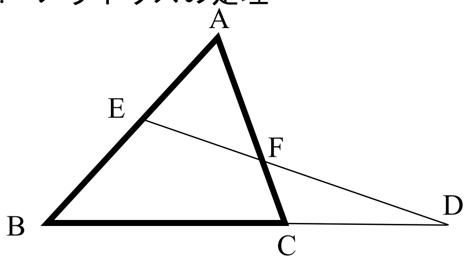
6.チェバの定理



三角形 ABC において、一周を方向を決めて
頂点⇒交点⇒頂点⇒交点・・と考える。
このとき、

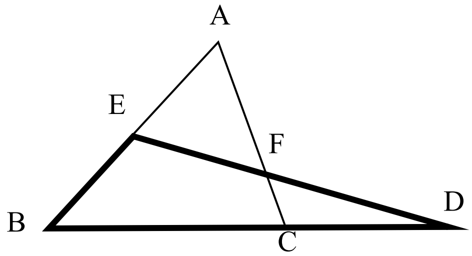
$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

7.　メラネウスの定理



三角形 ABC と三角形 BDE が一部辺を共有して重なっているとする。注目する三角形を考えて、頂点⇒交点⇒頂点⇒交点・・と点を移動する。
このとき、
A(頂点)→E(交点)→B(頂点)→D(交点)→C(頂点)→F(交点)→A(頂点)　終

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{BC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

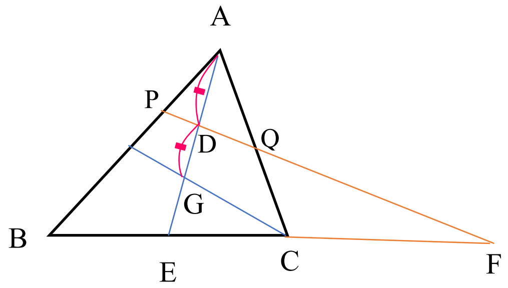


三角形 BDE を考えるなら
A(頂点)→A(交点)→B(頂点)→C(交点)→D(頂点)→F(交点)→E(頂点)　終

$$\frac{EA}{AB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{CF}{FE}=1$$

練習問題　2022 年度共通テスト数 1 A 第 5 問より

三角形 ABC の重心 G に対して、次の三角形を考える。



(1)　D が AG の中点とするとき$\frac{AD}{DE}$を求めよ。

AG:GE=2：1 より

$\frac{AD}{DE}=\frac{1}{2}$

(2) $\frac{BP}{AP}$と$\frac{CQ}{QA}$を求めよ。

△ABE と△PBF の重なりとして、メラネウスの定理を使う。

A(頂点)→P(交点)→B(頂点)→F(交点)→E(頂点)→D(交点)→A(頂点)

$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BF}{FE}\cdot\frac{ED}{DA}=1$

ED/DA=2 より

$\frac{BP}{AP}=2\times\frac{BF}{FE}$

△AEC と△DEF の重なりを考える

A(頂点)→D(交点)→E(頂点)→F(交点)→C(頂点)→Q(交点)→A(頂点)

$\frac{AD}{DE}\cdot\frac{EF}{FC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$

$\frac{CQ}{AQ}=2\times\frac{FC}{EF}$

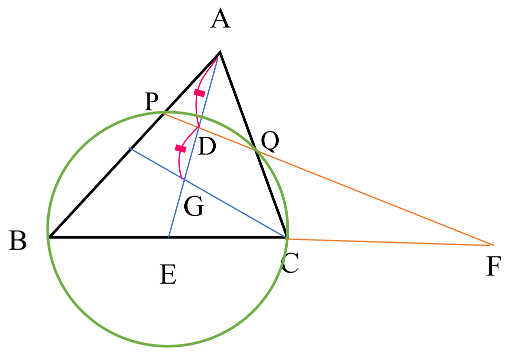
(3)　$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}$ は求めよ。

$$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=2\times\left(\frac{BF}{FE}+\frac{FC}{EF}\right)$$

ここで、BE と EC は等距離であるが、それぞれの距離を a とする。CF との距離を t とする。

$$2\times\left(\frac{BF}{FE}+\frac{EF}{FC}\right)=2\left(\frac{2a+t}{a+t}+\frac{t}{a+t}\right)=4$$

(4) AB=9, BC=8, AC=6 で　BPCQ は同一円周上にある。AQ と AP の関係から、AP と AQ を求めよ。



AP×AB=AQ×AC より

AP×9＝6×AQ

AQ＝3/2AP

BP＝9-AP　C=6-AQ より

$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=4$に代入すると

$$\frac{9-AP}{AP}+\frac{6-3/2AP}{3/2AP}=4$$

$AP=\frac{13}{6}$　　$AQ=\frac{13}{4}$

(5)　三角形 ABC の形状や F の位置の関係なく

$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}$ ＝10

となる条件$\frac{AD}{DG}$を求めよ。

メラネウスの定理より

$$\frac{AP}{PB}\frac{BF}{EF}\frac{ED}{AD}=1$$

$$\frac{BP}{AP}=\frac{BF}{EF}\frac{DE}{AD}$$

同様に、

$$\frac{AD}{DE}\frac{EF}{CF}\frac{CQ}{AQ}=1$$

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{DE}{AD}\frac{CF}{EF}$$

$$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=\frac{DE}{AD}\left(\frac{BF}{EF}+\frac{CF}{EF}\right)=2\frac{DE}{AD}=10$$

$\frac{DE}{AD}=5$ より　$\frac{DG}{AD}=\frac{1}{3}$

なかなかハードな問題でしたが、時間をかけて解けばできるとおもいます。