

平方完成

まずは肩慣らしです。平方完成を使って次の問題を解いてみましょう。

1. 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式を自分で導いてみましょう。

2. 次の数式を因数分解しなさい。

(1) $x^4 + 1$

(2) $x^4 + x^2 + 1$

(3) $x^2 + y^2 + 2xy + 4y + 4x$

3. 次の関数の最小値を求めなさい。ただし、 x 、 y ともに実数とします。

$$f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 3$$

4. 次の方程式を解きなさい。ただし、 x 、 y ともに実数とします。

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 4y = -10$$

(解答は次のページ)

解答

1. **二次方程式の解の導出**になります。

両辺を a で割り、平方完成する。

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2

- (1) $x^4 + 1$

この問題も平方完成させて解きます。 $x^4 = (x^2)^2$ とみなして平方完成させます。

$$x^4 + 1 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1 - 2x^2$$

このように、平方完成させるために項をおぎないます。

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

- (2) $x^4 + x^2 + 1$

平方完成して、 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ の形を狙う。

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

- (3) $x^2 + y^2 + 2xy + 4y + 4x$

項同士で平方完成できないかを考えて整理する。

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2xy + 4y + 4x &= x^2 + 2xy + y^2 + 4y + 4x = (x + y)^2 + 4(x + y) \\ &= (x + y)(x + y + 4)\end{aligned}$$

3. 二変数関数の最小値、最大値問題

こちらもなんとかして、平方完成を狙います。与式に $4xy$ があるので、これを2乗の形にして平方完成していきます。

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 3 \\ &= x^2 + 4xy + (2y)^2 + x^2 + 2x + 1 + 2 \\ &= (x + 2y)^2 + (x + 1)^2 + 2 \\ &= (x + 2y)^2 + x^2 + 2x + 1 + 2 \\ &= (x + 2y)^2 + (x + 1)^2 + 2\end{aligned}$$

カッコの2乗になっている部分は、中身が実数である限り最小値は0になります。つまり、 $x + 2y = 0$ 、 $x + 1 = 0$ は同時になりたちますので、この関数の最小は2になります。

4. この問題も2変数1式の方程式であるので変数が決まらないように思えますが、実数の条件がありますので、 $(\quad)^2$ の形が0以上になる性質を使います。

-10 を移項して平方完成していきます。

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 - 6x + 4y + 10 \\ &= x^2 - 6x + 9 + 4y^2 + 4y + 1 \\ &= (x - 3)^2 + (2y + 1)^2 = 0\end{aligned}$$

この等式が成り立つのは、かっこの中身がゼロのときです。

したがって $x = 3$ 、 $y = -1/2$ が答えになります。