

電磁気学演習 7章 電磁誘導

1. **電磁誘導の式** コイルの貫く磁束数を Φ 、コイルが n 回巻きとすると、鎖交磁束 Φ_M は $n\Phi$ で与えられる。磁束が時間変化したときに、コイルの起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -n\frac{d\Phi}{dt}$$

で表すことができる。これをファラデーの電磁誘導の法則という。

コイルを貫く磁束数 Φ は、コイル面での磁束密度 B が分かれば、

$$\Phi = \int_{\text{コイル面}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

で表すことができる。 \mathbf{n} はコイルの面に垂直な法線ベクトルで長さは1となる。もし、磁束密度 B がコイル面に垂直で、場所によらず均一であるなら、コイルの面積を S としたときに $\Phi=BS$ で表すことができる。

2. **磁場の時間変化に伴う空間に働く電界**

ここでは、ファラデーの電磁誘導の式である、 $V = -\frac{d\Phi_M}{dt}$ の式から、ストークスの定理を使うことで、空間に発生する電界ベクトルを \mathbf{E} とすると、

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

を導き出すことができる。これは、**ファラデーの電磁誘導の微分形**である。

3. **自己インダクタンス**

コイルはそれ自身に電流を流すと、コイルを貫く磁束線が発生する。自身の電流 I で鎖交磁束 Φ_M が発生したときに

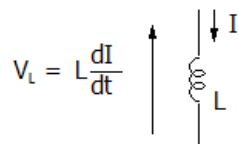
$$\Phi_M = LI$$

と表され、電流 I と鎖交磁束 Φ_M とには比例関係が成り立ち、その比例係数を**自己インダクタンス**という、単位はヘンリー[H]である。電流 I が時間変化すると、鎖交磁束が時間変化することになり、ファラデーの電磁誘導の法則により起電力が生じる。

$$V = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

の式が得られます。つまりコイル電流が時間変化するとその時間微分にインダクタンスをかけた分の電圧が発生する。マイナスは、電流の流れる向きの逆に電圧が発生するという意味である。

電気回路では、 V の方向をこのように定義すると



と表される。

例題 1 基本 二本線路を走行する導電棒の起電力を求めよ。磁束密度は線路面に垂直でどこでも一定の強さとする。

この問題で A と B の間は 1 回巻きのコイルとみなせる。

このときコイルを貫く磁束数 Φ は、線路の端から導電棒までの距離を x とすると、

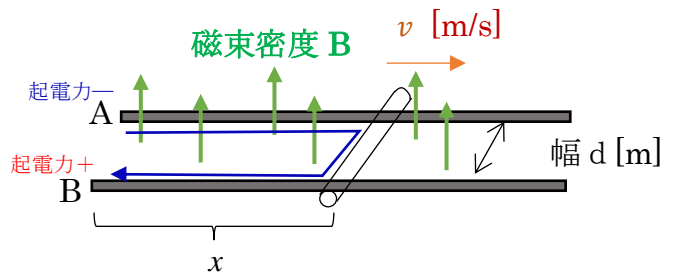
$$\Phi = Bdx$$

となる。この時間微分にマイナスをしたものが起電力 V になる。

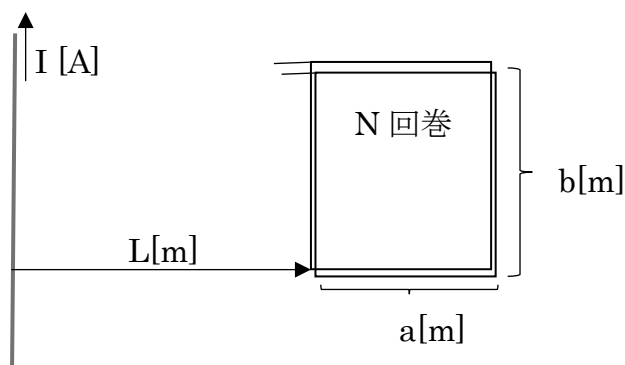
$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bd\frac{dx}{dt} = -Bdv$$

起電力の方向ですが、B がプラス、A がマイナスになる。

コイルの性質として、鎖交磁束数を変化させないように起電力を発生する。つまり B がプラスになったときに、コイル内を青→の方向に電流が流れ、その電流を中心にコイルに時計回りの磁場が発生し、全体の磁束密度が減らすようにする。この導電棒が右に動くことで、 $\Phi = Bdx$ は増加するが、起電力で B を打ち消して減らそうとする。したがって、B がプラス、A がマイナスになる。



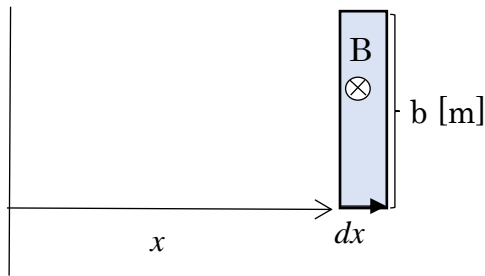
演習 2 頻出 直線電流 I [A] の作る磁束線が図のようなコイルに鎖交するとき、鎖交磁束 Φ_M を求めよ。電流が $I = \sin\omega t$ で表されるとき、起電力 V を求めよ。透磁率は μ_0 とする。



この場合は、直線電流からの距離を x とすると、そこを通る磁束密度は、

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

となる。距離が遠くなるほど磁束密度は小さくなる。この場合は面積積分で鎖交する磁束を計算する必要となる。鎖交磁束をもとめるために次の形を考える。



微小距離 dx と長さ b でできる長方形の面積は $b dx$ であり、この範囲で B が一定であることができ、そこを通る微小磁束密度 $d\Phi$ は、 $bB(x)dx$ となる。したがって、鎖交磁束は $d\Phi$ を距離 L から $L+a$ まで積分することで求められる。

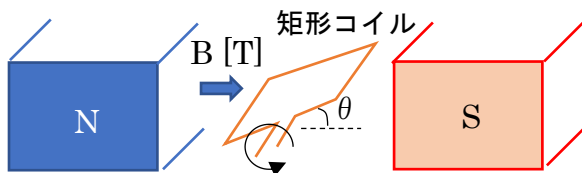
$$\begin{aligned}\Phi_M &= n \times \int_L^{L+a} bB(x)dx = n \int_L^{L+a} b \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = \frac{nb\mu_0 I}{2\pi} [\log x]_L^{L+a} \\ &= \frac{nb\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{L+a}{L}\end{aligned}$$

この時間微分のマイナスが起電力になる。この中で時間依存があるのは電流だけであり、それ以外の変数は定数とできる。

$$V = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{nb\mu_0}{2\pi} \log \frac{L+a}{L} \times \frac{dI}{dt} = -\frac{nb\mu_0}{2\pi} \log \frac{L+a}{L} \times \omega \cos \omega t = -\frac{nb\mu_0 \omega \cos \omega t}{2\pi} \log \frac{L+a}{L}$$

となる。

演習3 図のような一様磁場中に角周波数 ω で回転する1ターンの矩形コイルがある。このコイルの起電力を求めよ。コイルの軸に対する半径は a [m]、コイルの軸方向の長さが b [m] とする。



コイルの磁場 B に対する角度を θ とすると、

$$\theta = \omega t$$

で表される。

このときに、矩形コイルに鎖交する磁束 Φ は

$$\Phi = 2ab B \sin \omega t$$

で表される。

起電力は Φ の時間微分のマイナスで求められる。

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -2ab\omega B \cos\omega t$$

演習4 長さ h [m]、断面積 S [m²]で N 回巻のソレノイドコイルの自己インダクタンス L を求めなさい。透磁率は μ_0 とする。

図のように電流 I を流すと、コイルに磁束が貫く。コイルの巻き線を囲むように、長方形の経路 C を仮定して、アンペールの法則を適用すると、

$$\int_C B dl = \mu_0 NI$$

と表すことができる。コイルの内部に磁場が現れて、コイルの外では非常に小さいと仮定すると、磁束密度 B が存在する経路長は h になり

$$hB = \mu_0 NI$$

より、 $B = \frac{\mu_0 NI}{h}$ となる。すると、このコイルを貫く磁束（鎖交磁束 Φ_M ）は

$$\Phi_M = N \times B \times S = \frac{\mu_0 N^2 S}{h} I$$

となり、自己インダクタンス L は $\frac{\mu_0 N^2 S}{h}$ となる。

