高校数学の復習　数学B

平面の方程式

xyz の三次元空間において、平面を表す式について考えていきましょう。

基本 1　三次元 xyz 座標において、

平面を示す式

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

と表せます。

$\boxed{\text{例題 1}}$　三次元 xyz 座標において、点 O(0,0,0)、点 A(1,2,1)、点 B(2,1,0)を通る平面を求めなさい。

解法　それぞれの点について平面を示す式$ax + by + cz + d = 0$に代入して、係数 a,　b, c,　d を求めてみましょう。

まず、O(0,0,0)の座標を代入すると、$d = 0$となる。次に、点 A(1,2,1)、点 B(2,1,0)を代入すると、次の連立方程式が求められます。

$$a + 2b + c = 0 \qquad (1)$$

$$2a + b = 0 \qquad (2)$$

この式から、三変数で二式なので、係数 a,　b,　c は一意に決まりません。でも安心してください。

まず、ここで仮に$c = s$（s∈R）とします。s∈R は「s は実数である」という意味です。(2)式−2×(1)式より、

$$-3b - 2c = 0$$

$$b = -\frac{2}{3}c = -\frac{2}{3}s$$

よって

$$a = -2b - c = \frac{4}{3}s - s = \frac{1}{3}s$$

となる。つまり

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} s$$

となります。つまり$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ベクトルは$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$の定数倍であらわせます。わかりやすいところでは s=3 とすれば

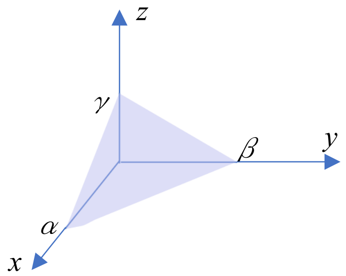
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となります。つまり、

$$x - 2y + 3z = 0$$

が題意でしめされた 3 点を満たし、すなわち 3 点を通る平面の式となります。

なお s は 0 以外で、どの値でも同じ形になります。



基本 2　三次元 *xyz* 座標において、

x, y, z 軸それぞれ α 、 β 、 γ で交わるときに

平面を示す式

$$\boxed{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1}$$

と表せます。

例題 2　三次元 *xyz* 座標において、点 A(2,0,0)、点 B(0,2,0)、点 C(0,0,3)を通る平面を求めなさい。

解法

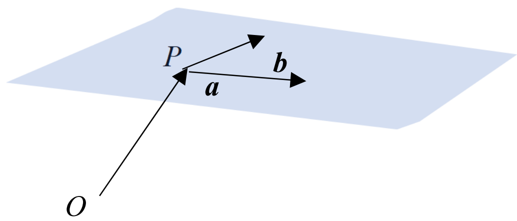
基本２の知識を使えば簡単ですね。

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$

と表せます。少し整理して、

$$3x + 3y + 2z = 6$$

となります。



基本 3　三次元空間の平面に含まれる座標ベクトルは、平面に含まれる点 P の座標ベクトルと平面に平行な二つの、互いに同一方向ではないベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を使って次のように表すことができます。

平面の座標ベクトル

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \quad \text{ただし } s, t \in \mathbf{R}$$

$s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$の部分はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の一次結合といいます。大学課程の線形代数で習います。互いに平行ではないと説明しましたが、線形代数では一次独立であるといいます。

例題 3　三次元 xyz 座標において、次の平面の方程式がある。

$x+3y+z=1$

この平面の座標をベクトルで表しない。

解法　まず、z 座標を実数 s,　y 座標を実数 t とします。そうすると、x は

$$x=1-3t-s$$

となります。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-3t-s \\ t \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せます。

つまり、この平面は$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を通り、ベクトル$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$に平行であるといえます。

基本 4　三次元 xyz 座標において、

平面を示す式

$$ax+by+cz+d=0$$

と表せるときに、ベクトル$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$は、平面に垂直なベクトル（**法線ベクトル**）となる。

例題 4　三次元 xyz 座標において、次の平面の方程式がある。

$x+3y+z=1$

このとき、ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$は平面に対して垂直であることを示しなさい。

解法

ベクトル同士が互いに垂直であることを言うには、内積を計算して 0 になることを言えばよいです。例えば$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$とすると、その内積はそれぞれの要素の積の和になります。

内積　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

になります。

問題に戻りましょう。例題 4 よりベクトル$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$は平行ベクトルであることが

わかっています。それぞれ内積を計算してみましょう。

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}=-3+3+0=0$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-1+1=0$$

以上より、ベクトル$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$は平面に対して垂直であることがわかります。

$\boxed{\text{例題 4}}$　三次元 *xyz* 座標において、次の平面の方程式がある。

$$x+3y+z=1$$

これを満たす点を P とする。原点 O から P までの距離が、最小になる P 点の座標を求めなさい。また最小距離を求めなさい。（数学甲子園 2015　準々決勝問題改題）

解答　この平面の式は原点 O が含まれないので、距離が最小になるとは、OP ベクトルが平面に対して垂直になればよい。

この平面の式の法線ベクトルは$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$なので、OP ベクトルを次のように仮定する。

$$\overrightarrow{OP}=s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\3s\\s\end{pmatrix}$$ 但し s ∈ **R**　(s は実数)

これを平面の方程式に代入すると、

$$x+3y+z=s+9s+s=11s=1$$

$$s=\frac{1}{11}$$

したがって、P 点の座標は$\begin{pmatrix}\frac{1}{11}\\\frac{3}{11}\\\frac{1}{11}\end{pmatrix}$となる。

なお距離は

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\frac{1}{11}\sqrt{1^2+3^2+1^2}=\frac{1}{\sqrt{11}}$$

となります。

$\boxed{\text{例題 5}}$　三次元 *xyz* 座標において、ベクトル$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$に平行であり、点$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$を通る平面の方程式を求めなさい。

解法 1

平面に含まれる座標はつぎのように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t+s \\ 1+t \\ 1+s \end{pmatrix}$$

つまり

$$x = 1 + t + s$$
$$y = 1 + t$$
$$z = 1 + s$$

となり、ただし $s, t \in \mathbf{R}$ です。この連立方程式から s、t を消去します。

$$y + z = 2 + t + s = 1 + x$$
$$-x + y + z = 1$$

となりますね。

解法 2

平面の法線ベクトルを求めます。大学課程でしたら、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の外積が法線ベクトルになりますが、それは大学での勉強に譲りましょう。法線ベクトルを $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ とし、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ との内積をとります。

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha + \beta = 0$$
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha + \gamma = 0$$

ここで γ を実数 u とします。すると $\alpha = -u$、$\beta = u$ となり、

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ u \\ u \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります。つまり、法線ベクトルとして $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすることができます。もちろん実数 u は任意なので、−1 とすれば $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ も法線ベクトルとなります。

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が法線ベクトルとなることより、平面の方程式は

$$-x + y + z = d$$

となり、この式は点$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$をみたすので、

$$-x+y+z=1$$

が平面の方程式となります。