高校数学の復習 7　因数定理・剰余の定理

まずは問題を出しますので、考えてみてください。

1. 次の数式が$(x-2)$と$(x+1)$の因数を持つときに、係数 a と b を求めよ。

   $f(x)=x^4+ax^2+bx-6$

2. 次の 3 次式を因数分解しなさい。

   $x^3-6x^2+11x-6$

3. 関数$f(x)=3x^4+2x^2-x+7$をx^2-5x+6で割った余りを求めなさない。

因数定理

多項式 P(x)において P(a)=0 となるとき多項式 P(x) は(x=a)の因数を持つ。この原理を使って、多項式の因数分解をするのに使います。

1. 次の数式が$(x-2)$と$(x+1)$の因数を持つときに、係数 a と b を求めよ。
   $f(x)=x^4+ax^2+bx-6$

この場合関数 $f(2)$＝0、$f(-1)$＝0 となることより次の連立方程式が成り立つ。

$f(2)=2^4+4a+2b-6=4a+2b+10=0$
$f(-1)=1+a-b-6=a-b-5=0$

$a=0,\ b=-5$と求められる。$f(x)=x^4-5x-6$ となる。

2. 次の 3 次式を因数分解しなさい。
   $x^3-6x^2+11x-6$

未知の多項式を因数分解するときは定数項の素因数を候補として、因数定理で調べる。-6の素因数として、±1、±2、±3、±6 を候補として、$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ に代入して 0 になるかどうかを調べる。
その結果 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、が 0 となる。したがって、
$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$
となる。

3. 関数$f(x)=3x^4+2x^2-x+7$をx^2-5x+6で割った余りを求めなさない。

4 次式を二次式で割り算をおこなうと、剰余は一次式となる。またx^2-5x+6
$=(x-2)(x-3)$ と因数分解ができる。商を$Q(x)$とし、剰余を$ax+b$とすると与式は次のように書くことができる。

$f(x)=3x^4+2x^2-x+7=Q(x)\cdot(x^2-5x+6)+ax+b$

ここで$x=2,\ 3$を $f(x)$に代入すると$Q(x)\cdot(x^2-5x+6)$の項が 0 となるので次の式が成り立つ。
$f(2)=61=2a+b$
$f(3)=265=3a+b$
以上より、$a=204$、$b=-347$となり、余りは 204x-347 となる。