第 2 章　半導体工学のための電磁気学

半導体デバイスの働きを理解するためには、電磁気学の知識が必要である。とりわけ、電荷の作る電界、電位の計算は必須である。多くの大学課程でこれらを計算するために、電気力線図を使って電界ベクトルをイメージし、ガウスの式、電位と電界の関係式を積分を使って解くことを教わる。しかし、半導体の世界では、ガウスの式の微分形、ポアソン式を使って解くことになるため、初学者はかなりの混乱を伴う。筆者は学生時代、電磁気学はマクスウェル方程式とベクトル解析から習ったため、半導体の勉強に違和感はなかった。実は積分型の計算は、球体や円筒の計算が得意であり、微分で解く方法は面状に分布している電界の計算に向いているのである。ここでは、半導体デバイスを勉強するための電磁気学について解説する。ここでは電荷と電界、電位の関係が中心である。磁気についてはよほどの特殊な事例を除いてお目見えすることはないので、他の良著に解説をゆずりたい。蛇足ではあるが、筆者は電磁気学を理解するのは演習書を片手に、丹念に問題を解きながら覚えていくものと考えている。スポーツと同じである。本書ではその練習問題を提供できるほどの紙面はなく、必要なところは大学２年課程で使う教科書を参考に自習していただきたい。あくまでもここの章では忘れかけた点を復習するための総括にあたる。

１．ベクトル表示とベクトル演算

半導体の世界ではほとんどの事例が１次元で説明されているが、今後の応用も含めて３次元ベクトルになれておきたい。まず３次元ベクトルの表記であるが、xyz 座標で成分が(l, m, n)で E ベクトルが表わされるときに、

$$E=(l,\quad m,\quad n)\quad \text{或いは}$$
$$=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$$

と記述される。電磁気学の教科書では単位ベクトルの ijk 表示がよくつかわれているが、筆者は半導体の世界で ijk 表示が使われているのを目にしたことはない。カッコ表示で十分である。

次に示すベクトル演算は覚えておくべきである。ここではベクトル $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$と$\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)$の演算例を示す。

-ベクトルの大きさ-

$$|\mathbf{E}|=\sqrt{E_x{}^2+E_y{}^2+E_z{}^2}$$

-単位ベクトル-　そのベクトルと同じ方向をもった長さ１のベクトルのことである。

$$\hat{\mathbf{E}}=\frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|}=\frac{1}{\sqrt{E_X{}^2+E_Y{}^2+E_Z{}^2}}(Ex, Ey, Ez)$$

-ベクトルの内積-

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{F}=(E_x F_x,\quad E_y F_y,\quad E_z F_z)$$
$$=|\mathbf{E}||\mathbf{F}|\cos\theta$$

ただし、θは$\mathbf{E}$と$\mathbf{F}$のなす角のことである。

－ベクトルの外積－

めったに使うことはない外積であるが、半導体技術者は磁気の問題も周辺分野で扱うことであろう。

$$\mathbf{E}\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \mathrm{E_x} & \mathrm{E_y} & \mathrm{E_z}\\ \mathrm{F_x} & \mathrm{F_y} & \mathrm{F_z}\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}\left(E_yF_z-E_zF_y\right)+\boldsymbol{j}\left(E_zF_x-E_xF_z\right)+\boldsymbol{k}\left(E_xF_y-E_yF_x\right)$$

-ベクトルの勾配-

grad グラディエント

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{E}=\left(\frac{\partial\mathrm{E_x}}{\partial\mathrm{x}},\quad\frac{\partial\mathrm{E_y}}{\partial\mathrm{y}},\quad\frac{\partial\mathrm{E_z}}{\partial\mathrm{z}}\right)$$

-ベクトルの発散-

これはガウスの式の微分計や拡散方程式で使う。

div ダイバージェンス

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{\partial\mathrm{E_x}}{\partial\mathrm{x}}+\frac{\partial\mathrm{E_y}}{\partial\mathrm{y}}+\frac{\partial\mathrm{E_z}}{\partial\mathrm{z}}$$

- ベクトルのラプラシアン-

これはポアソン式で使う。

$$\nabla^2\mathbf{E}=\frac{\partial^2\mathrm{E_x}}{\partial\mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2\mathrm{E_y}}{\partial\mathrm{y}^2}+\frac{\partial^2\mathrm{E_z}}{\partial\mathrm{z}^2}$$

-ベクトルの回転-

rot ローテーション

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial\mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial\mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial\mathrm{z}}\\ \mathrm{E_x} & \mathrm{E_y} & \mathrm{E_z}\end{vmatrix}$$

２．電界と電位の関係

電界ベクトル **E** から電位 V を計算するときは、基準となる点 $\mathrm{P_0}$を定めた時、求める点を P としたとき、次の線積分の関係式で記述される。

$$\mathrm{V}=-\int_{\mathrm{P_0}}^{\mathrm{P}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

電位 V から電界ベクトル **E** をもとめるときは次のとおりである。

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,V$$

３．点電荷の作る電界

点電荷からは電気力線が四方八方に飛び出している。電気力線の面密度を電界であると理解してよい。

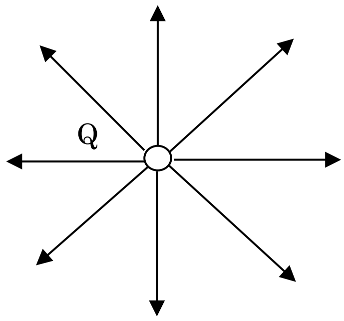


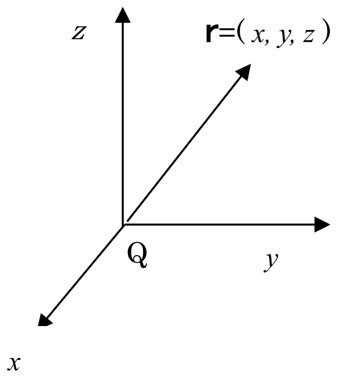
図　正の点電荷からの電気力線図

Q[C]の点電荷からでる電気力線の総数は、誘電率を ε とすると、Q/ε である。距離 r [m]で離れたところにできる球面の面積は $4\pi r^2$であるから、それで割った値は距離 r で離れたところの電界強度となる。

$$|E|=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\quad(V/m)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}}\quad(V/m)$$

－例－　正電荷 Q が原点にあるとしたときに、 **r** で表された点にできる電界は次のとおりである。

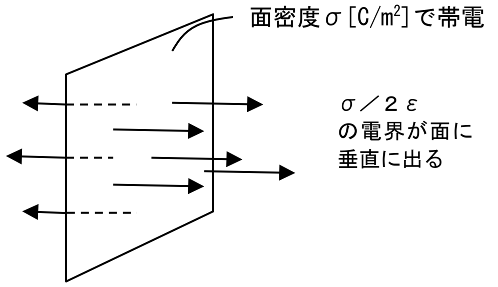


電界強度 E は簡単な式であらわされるが、ベクトル表記では、それに **r** 方向の単位ベクトルをつける。

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

３．　面状電荷の作る電界

平面上に電荷密度 σ [C/m^2]で面状電荷がある場合は、その面に垂直に$\frac{\sigma}{2\varepsilon}$の電界がでていると覚える。ガウスの式をイメージすればわかるとは思うが、半導体工学の技術者にここで思考するのは時間がもったいない。



４.電荷と電界の関係 -ガウスの式-

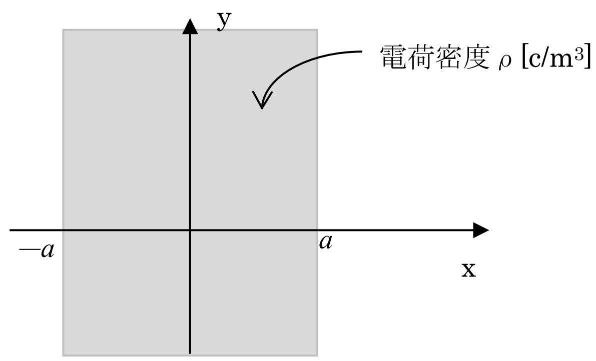
半導体の世界では面状に分布した電荷を扱うことが多いため、ここでは微分型のガウスの式を覚えてもらいたい。電界を E、電荷密度を ρ 、誘電率を ε としたときに次の式であらわされる。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

なお積分型については次の式のとおりである。

《例題》

次の面状に分布する電荷の中の電界強度をもとめてみる。xyz 座標において、$-a<x<a$ の範囲で、電荷密度 ρ [c/m^3]で分布しているとする。



－解法－　　　$-a < x < a$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{E_y}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{E_z}}{\partial \mathrm{z}} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

面状電荷の場合、電気力線は x 方向に平行になるため、 y 方向および z 方向の変化はないため、ガウスの微分形は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

１回積分をすると、x 方向の電界成分 Ex は

$E_x = \frac{\rho}{\epsilon}x + C$　となる。 C は積分定数

この系は yz 平面に対して対称であり、x=0 で電界強度はゼロになるため、積分定数もゼロでる。電界ベクトルの x 成分は

$E_x = \frac{\rho}{\epsilon}x$

となる。なお x>a の範囲では、電荷密度はゼロのため、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

を解けばよい。この領域では Ex は定数になるが、-a<x<a の範囲のとの連続性から、

$$E_x = \frac{\rho}{\epsilon}a$$

となる。x＜-a の範囲では

$$E_x = -\frac{\rho}{\epsilon}a$$

となる。

５.ポアソン式

点電荷が分布していて電位を直接求めるためには次のポアソン式を使う。

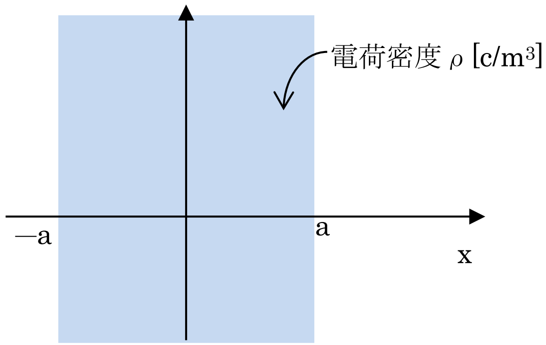
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

ここで、V は電位、ρ は電荷密度である。ε は誘電率である。このポアソン式は xyz 平面では次の式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 Vx}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Vy}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Vz}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

《例題》

前項と同じ例題であるが、面状に分布する電荷の中の電位 V をもとめてみる。xyz 座標において、-a<x<a の範囲で、電荷密度 ρ [c/m³]で分布しているとする。



－解法 -

$-a < x < a$で次のポアソン式がなりたつ。

$$\frac{\partial^2 Vx}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

なおここでは x 方向成分のみを考える。

この式の微分方程式は次の通りである。

$$Vx = -\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2 + C_1 x + C_2$$

なお C_1 と C_2 は積分定数である。 x ＝0 での電位をゼロとすると、C_2 はゼロである。なお電界の大きさ E は、上式を 1 回微分してマイナスすればよい。

$$Ex = \frac{\rho}{\varepsilon}x - C_1$$

x ＝0 での電界ゼロなので、C_1 はゼロとなる。電位は

$$Vx = -\frac{\rho}{2\varepsilon}x^2$$

となる。なお$-a < x < a$の範囲外は考えないこととする。この系で無限円点では無限大の電位となる。電磁気学者はこのように実際に実現すると無限大のエネルギーを要する系は例題にしたがらない傾向にあるが、ここで出てくる例題は半導体の電位障壁を計算するために必要な計算であり、批判を

恐れず例題としておく。

６.導体と静電遮蔽

導体とは電気抵抗が非常に低い、たとえば金属である。半導体デバイスの世界でも金属膜は導体として扱う。電磁気の世界では導体の抵抗はゼロとみなす。導体には次の性質がある。

1. 導体内部では電位は一定である。もし内部に電位差があれば、電位差に違う部分で無限大の電流がながれてしまう。抵抗がゼロということは、導体内部で電位の分布はあってはならないのである。

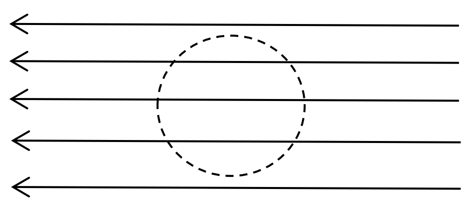
2. 導体内部では電界はゼロである。電位の勾配にマイナスしたもので電界であり、電位はどこでも一定であるので、勾配がないためゼロになる。これは外部から導体に電界をかけたときに、電気力線が導体内を貫けないということである。導体内部には電荷は存在しない。

3. 導体内の電荷は常に中性である。電磁気学では導体内に電荷が存在できないと教わるが、意味は中性、差し引きゼロであることを意味する。もし導体内で電荷が正或いは負に帯電したとき、電気力線が発生し、電界ができてしまう。電界がでると無限電流が流れて、たちどころに帯電した部分は打ち消されてしまう。

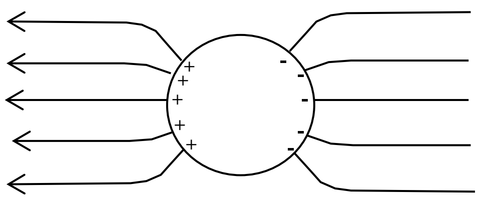
4. 導体自体が帯電すると、電荷は導体の表面に分布する。これを**表面電荷**という。帯電していない導体でも外部電場に中におくと表面に電荷分布が現れる。これらの表面電荷は導体内部の至る所で E＝０が実現できるように分布する。

5. 導体表面では電界ベクトルは直交する。これは証明が大変難しいのが、単純に異種材料の境界では電界ベクトルの境界面に平行な成分は連続性をたもつため、導体内では電界はゼロのため、電界ベクトルは導体に垂直入射する。

-例-　一様電界に導体球を置いた場合

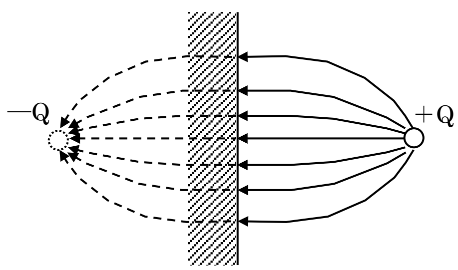


電気力線は曲げられ、導体球に垂直に入射する。電気力線が入るところは負の表面電荷が現れ、電気力線が出るところは正の電荷が現れる。導体内の電界はゼロとなる。



７.鏡像電荷

導体の近くに電荷を置くと、導体付近には表面電荷が現れて、電気力線図は次のようになる。



この表面電荷によって電荷は導体側にクーロン力を感じるが、あたかも導体表面を対称に逆極の電荷を置いたものとみなせる。この逆極の電荷を**鏡像電荷**と呼ぶ。点電荷周りの電位や電界分布を計算するには、導体はないものとして、鏡像電荷を仮定して、点電荷の作る電界、電位を重ね合わせて求めればよい。

導体の性質であるが、接地された（或いは電位が固定された）導体板を超えて電界はつきぬけることはできない。これを**静電遮蔽**という。小型ラジオをアルミホイルでくるむとラジオがきこえなくなるのは、外界から電波がアルミホイルに阻まれてラジオまでとどかないためである。このように金属などの導体が接地されている場合は、導体は電波などの電磁波、電界の侵入させない働きをする。業界では静電シールドと呼ぶ。同軸ケーブルも静電シールドされた電線であり、外部からの電磁波がノイズとして信号線に乗りにくくする働きがある。

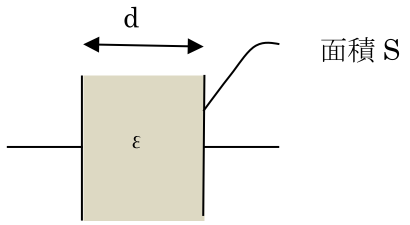
８.平行平板コンデンサ

８－１.単層コンデンサ

平行平板の中が真空或いは均一の誘電体で満たされている場合のコンデンサについて述べる。このときのキャパシタンスＣは次の式であらわされる。

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

このときεは誘電率、Sは電極の面積、dは電極間距離である。



このコンデンサに電圧Ｖをかけた時に、コンデンサに蓄積される電荷Ｑは次の式であらわされる。

$$Q = CV$$

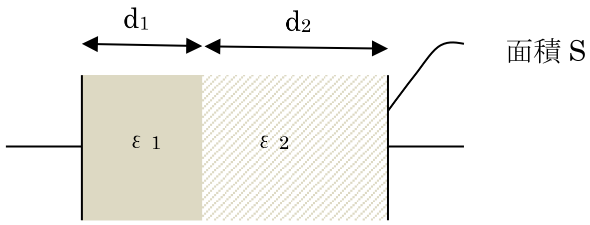
さらに、蓄積されるエネルギーUは、

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

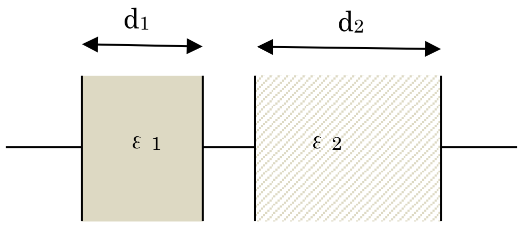
であらわされる。

８－２．２層コンデンサ

図のように２層の異なる誘電率からなるコンデンサであるが、これは半導体デバイスの世界ではＭＯＳＦＥＴのＭＯＳキャパシタがこれに相当する。



このようなコンデンサは、誘電体の境界に電極を置いて二つにわけた、コンデンサの直列構造と等価である。



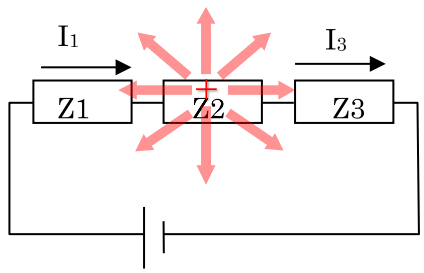
この合成容量は、左のコンデンサをC_1

(= ε_1S/d)、右のコンデンサの容量をＣ$_2$(= ε_2S/d)とすると、次の式であらわされる。

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

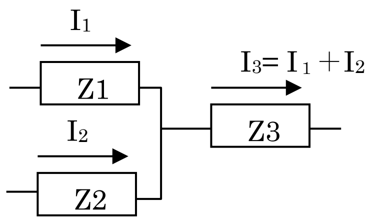
９.電荷中性則とキルヒホッフの法則

電気回路の世界で直列回路において、流れる電流はどこも一定であると教わるが、これを単に法則としてではなく、なぜ一定であるのか考えてみよう。つぎの直列回路があったとする。仮に素子 Z1 に流れる電流が I_1、素子 Z3 に流れる電流を I_3 とする。仮に I_1 に対して I_3 が大きいという事態がおきたとする。電流は電荷の流れであるから、Z1 の方をとおる電流が大きいということは素子２のところで正電荷が溜まることを意味する。正電荷の溜まった素子２から四方八方に電気力線が発することになる。この電気力線によって、素子 1 では正の電荷は流れ込みにくくなり、電子はより素子２にひきつけられる。これは溜まった電荷が電流 I_1 を下げるように働く。同じようなことが素子３でも起こり、電流 I_3 はより増強されるように働く。つまり、直列回路で電流は常に同じになるように流れる。これは電荷の溜まりを作らないようにするためである。



半導体においては、電流を作るキャリアは電子とホールがあるが、<u>電子電流とホール電流には偏りがあっても総和の電流は直列回路のどこをとっても等しくなる</u>。

次の図にキルヒホッフの電流総和は一定の法則の模式図を示す。素子１と素子２にそれぞれ電流が I_1 と I_2 で流れて素子３に電流 I_3 が流れている時に、I_3 は I_1 と I_2 の和に等しい。これももし等しくなければ、途中の導線に電荷が溜まることになり、その電荷が電気力線を発して、等しくなるように電荷の流れを変えてしまうのである。



以上の考察からあきらかなように、半導体中ではコンデンサの双極子の部分、たとえば MOS キャパシタの両端などの部分を除いて、いかなる箇所も電荷の中性が保たれる。MOS キャパシタもそれ自体は正味の電荷はゼロと考えれば、これも中性がなりたっていると考えることができる。中性でなければ、電気力線を発して回りのキャリアを動かして中和されてしまう。以上のようにあらゆる場所で電荷が中性であることを**電荷中性則**という。余談ではあるが、半導体のデバイスの電気特性を予測するデバイスシミュレーションと呼ばれる技術がある。これは半導体中のポアソン式、キャリア連続の式、周辺の電位条件と電荷中性則を満足するように解くことで所定の特性の計算を行っているが、計算資源が必要であることが欠点である。一方、パソコン程度の環境

でも容易に答えが求められる**モンテカルロ法**を原理として、キャリア 1 個の振る舞いを多数計算して積算する方法が知られているが、この計算では電荷中性則を全く考慮されていないため、大電流時の計算には大きな誤差を生じることが問題である。半導体デバイスの動作を考える上で、電荷中性則は常に念頭におかなければいけない。

閑話休題

　電磁気学については半導体の教科書で書くには余りにも尺がたりない。電磁気学の要点と演習ということで、教科書化を考えたい。電磁気学は球技のようなスポーツであり、練習して覚えていくものである。そういう意味では学びなおしの演習書があればと思うが、あとは筆者の気力次第である。

9.Maxwell 方程式と電荷連続の式

電磁気学でも原理原則を求めてを紐解けば、Maxwell 方程式にたどりつく。半導体工学の中でマクスウェル方程式が出てくることはほとんどないが、いずれ磁気効果も勘案したデバイス構造設計や、電磁波との相互作用を考えるうえでMaxwell方程式とは無縁ではなくなる。Maxwell 方程式とは次の４式を指す。(細かい話であるが、本来の Maxwell 方程式は(3)、(4)式のみとする専門家もいる。)

ガウスの式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (1)$$

磁気の湧き出しはゼロ

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \qquad (2)$$

電磁誘導の式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \qquad (3)$$

アンペールの周回積分の式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} + \varepsilon\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} \qquad (4)$$

この式から半導体分野では基本法則となる**電荷連続の式**を導く。(1)のガウスの式の両辺の時間微分をとる。

$$\mathrm{div}\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\rho}{dt} \qquad (5)$$

(4)式を(5)式に代入すると、

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{I}}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\rho}{dt} \qquad (6)$$

となる。divrot$\boldsymbol{H}$は 0 になるので、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{I} = -\frac{d\rho}{dt} \qquad (7)$$

が導かれる。この式は電荷連続の式と呼ばれる。単位体積の空間に電流が流れ込むと、そこに蓄積される電荷の量の増分が電流に等しいという式である。電線や抵抗器では電荷の蓄積がないため、(7)式は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{I} = 0 \qquad (8)$$

となる。これは、ある部分に電流があったときに、流れ込む電流と出る電流の差引きはゼロとなる。これは電気回路の世界では**キルホッフの法則**となる。

10.波動方程式の導出

半導体技術者に必要かどうかは分野によるが、教育者としては Maxwell 方程式から電磁波の伝搬をつかさどる波動方程式が導かれることを語ることを禁じ得ない。

(4)式の両辺をそれぞれ rot をとる。電流は流れないとして、

$$\mathrm{rotrot}\boldsymbol{H} = \varepsilon\frac{d\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E}}{dt} \qquad (9)$$

となる。

$$\mathrm{rotrot}\boldsymbol{H} = \mathrm{graddiv}\boldsymbol{H} - \mathrm{divgrad}\boldsymbol{H}$$

の関係から、また div$\boldsymbol{H}$ は(2)式からゼロになるので、

$$-\mathrm{divgrad}\boldsymbol{H} = \varepsilon\frac{d\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E}}{dt} \qquad (10)$$

となる。これに(3)式を代入すると、

$$\mathrm{divgrad}\boldsymbol{H} = \varepsilon\frac{d^2\boldsymbol{B}}{dt^2} \qquad (11)$$

B=μH の関係を使って式を整理する。また divgrad はラプラシアン ∇^2 となるので

$$\nabla^2\boldsymbol{B} = \mu\varepsilon\frac{d^2\boldsymbol{B}}{dt^2} \qquad (12)$$

これが波動方程式である。同様に電界についても次のような波動方程式が導かれる。

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\mathcal{E}\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dt^2} \qquad (13)$$

この波動方程式の一般解は、

$$\mathrm{E} = \mathrm{A}e^{-i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\mathrm{x}+i\omega\mathrm{t}} + \mathrm{B}e^{-i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\mathrm{x}+i\omega\mathrm{t}} \qquad (15)$$

で表され、波の式となる。A,B は定数、x は位置、ω は角周波数となる。波の伝搬速度は

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (16)$$

で表され、光速となる。