

第 3 章 交流と R-L-C 直列・並列回路

ここから交流回路に話を移していく。交流の基礎的な理解をもとに、R、L、C に交流を加えたときのインピーダンス、電流電圧の位相について理解する。さらに、R、L、C を含む直列および並列回路における、有効電力、無効電力、力率の計算に話が及び。この三章を理解することで、交流でのこれら素子のふるまいについて概念構築ができ、それは実用的な電気送電を学ぶための下地になるだろう。

1. 交流信号

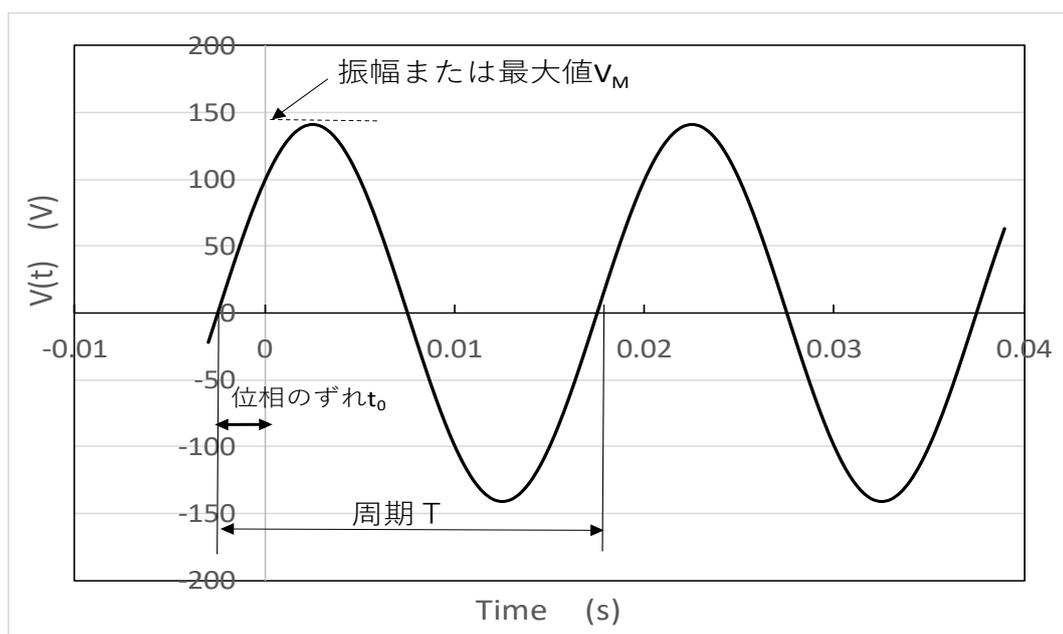
交流信号は正弦波であり、位置を含まない時間だけに依存する波の式で表される。仮に、振幅を V_M としたときに、波の瞬時値は次のように書くことができる。

$$V(t) = V_M \sin(\omega t + \theta)$$

この式において、 ω は角周波数(rad/s)で、周波数を f とする $\omega = 2\pi f$ で表される。 θ は位相角(位相)と呼ばれる。周期 T とすると、 $T = 1/f = 2\pi/\omega$ で表される。 $V_M \sin(\omega t)$ の波形のずれ時間を t_0 とすると $t_0 = -\theta/\omega$ で表され、位相角 θ は $\theta =$

$-2\pi t_0/T$ で表される。

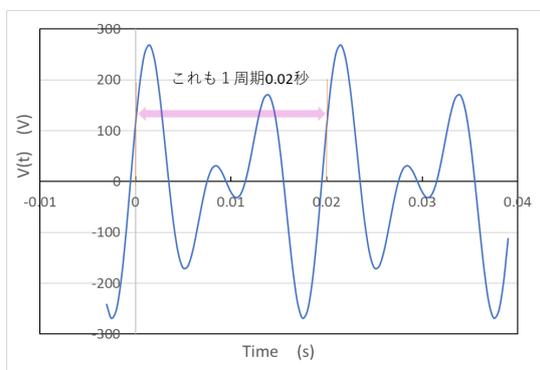
下の図は 100V で 50Hz の交流波形を例として表している。50Hz なので周期 T は 0.02 秒になる。この例では位相角 θ は $\pi/4$ になる。波形の最大値を振幅という。最大値 V_M を $1/\sqrt{2}$ した値を実効値という。実効値は、交流信号の二乗平均値でもある。実効値は実効値と同じ値の直流の電圧と比べたときに、同一の負荷抵抗で同じ消費電力となる。つまり、交流であっても抵抗 R を負荷としたときに、実効値 V_e の交流を加えた場合、消費電力 P は V_e^2/R で計算できる。



通常、電気回路の世界では、交流の電圧の表示は実効値を使う。100V といえば、最大値は $\sqrt{2}$ 倍の約 141V が出ている。交流電圧 $v_0[V]$ という場合は、実際の交流の最大値は $\sqrt{2}v_0$ ということである。ただし、このルールが適用されていない場合もあることはある。この教科書では、交流信号の値表示は、電圧、電流を問わず実効値とする。

2. 周期波形

交流信号においては、正弦波だけではなく複雑であっても周期的なものであれば交流として扱う。例えば、三角波や方形波などがあげられる。下の図のような波形であるが、これも先ほどの 50Hz の波形と同様、0.02 秒を周期とする交流であるが、正弦波にはみえない。



このような、周期波形は、周期の逆数の周波数を基本周波数とする、基本周波数の整数倍の周波数の正弦波（高調波）の重なりと考える。つまり、周期的な波形は基本波と高調波の重ね合わせで表される。これはフーリエ級数の概念で理解することができる。なお高調波の成分は、基本波にとってはそれ以外の成分であり、歪（ひずみ）波とも呼ばれる。

3. 周期波のフーリエ級数表現

周期 T 秒で繰り返される波形 $f(t)$ がある。 $f(t+T)=f(t)$ が成り立つとする。このとき波形 $f(t)$ は次のようにフーリエ級数に展開できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right)$$

このとき、 $\omega=2\pi f$ であるため、簡単には次のように書くことができる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

この形になると、基本波を含む整数倍の周波数の正弦波、余弦波の組み合わせになることがわかる。余弦波も正弦波の位相がずれただけであり、同一の形である、正弦波の組み合わせと違って間違いはない。この式で a_n, b_n はフーリエ係数になるが、次のように求めることができる。

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad n=1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad n=1,2,\dots$$

この式は、偶関数か奇関数かでさらに計算が簡単になる。

偶関数、すなわち $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ を周期とする関数で $f(-t) = f(t)$ が成り立つ場合は、

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt \quad n=1,2,\dots$$

となり、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t)$$

となる。

奇関数、すなわち $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ を周期とする関数で $f(-t) = -f(t)$ が成り立つ場合は、

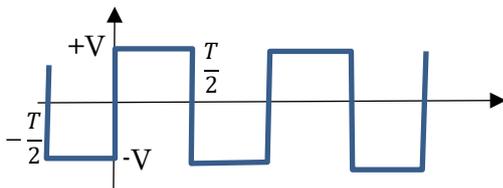
$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt \quad n=1,2,\dots$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin n\omega t) \quad n = 1,2,\dots$$

と表すことができる。

以上のことは、sin 波は奇関数であり、奇関数の波形は sin 波のみで表すことができ、cos 波は偶関数であり、偶関数の波形は cos 波のみで表すことができるということである。

例題 1 次の方形波をフーリエ級数展開せよ。



解法) この場合は、 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ を周期とする奇関数である。したがって、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V \sin n\omega t dt = \frac{4V}{T} \left[\frac{-\cos n\omega t}{n\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{4V}{T} \left[\frac{1 - \cos n\omega \frac{T}{2}}{n\omega} \right] = \frac{4V}{T} \left[\frac{1 - \cos n\pi}{n\omega} \right] \\ &= \frac{4V}{T} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\omega} \right] \\ &= \frac{8V}{Tk\omega} = \frac{4V}{k\pi} \quad k=2n+1 \quad (\text{奇数}) \end{aligned}$$

したがって方形波 $f(t)$ は次のようにかくことできる。

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right]$$

方形波は、高調波と奇数倍の周波数をもつ高調波の組み合わせになる。

余談であるが、先ほどの方形波のフーリエ級数の式において $t=T/4$ で、 $V=1$ とすると、

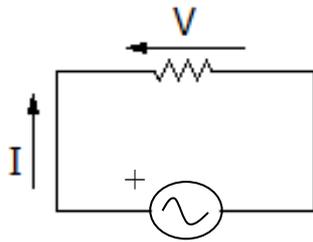
$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

という、興味深い式を得る。 π の級数表現であるが、奇数の逆数を足したり、引いたりしていくと π が得られる。この式はインドの数学者のマーダバが見出して、後にグレゴリー、ライプニッツによって再発見されたとされている。

4. 交流電流通電時の R-L-C 素子のインピーダンス

1) 抵抗の場合

図のように抵抗に交流電圧をかけて交流電流 $I = I_0 \sin \omega t$ が流れたときに抵抗に起こる電圧 V はオームの法則により、 $V = RI_0 \sin \omega t$ と求められる。上記の I と V において、振幅の比、すなわち電流の振幅に対する電圧の振幅の比をインピーダンスといい、この教科書では $|Z|$ と書く。 $| |$ は絶対値、大きさを表し、ノルムともいう。なぜノルムをつけるかというと、後章では Z は位相情報を含むフェーザ表示もあるため、誤解がないように単純な振幅比の場合はこのようにしている。抵抗のインピーダンスは R となる。抵抗において、電流と電圧の位相差はない。同位相である。



ここで、実効値 V_E の交流電圧 ($V = \sqrt{2}V_E \sin \omega t$) が抵抗 $R[\Omega]$ にかけているときの消費電力を求めてみよう。電力の瞬時値は時々刻々と変化しているので、一周期の平均でもとめてみる。

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^T \frac{V^2}{R} dt / T = \frac{1}{RT} \int_0^T 2 \sin^2 \omega t dt \\
 &= \frac{2V_E^2}{RT} \int_0^T \sin^2 \omega t dt \\
 &= \frac{2V_E^2}{RT} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt \\
 &= \frac{2V_E^2}{RT} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_0^T \\
 &= \frac{V_E^2}{R}
 \end{aligned}$$

これを見てわかるように、交流信号を実効値で標記すると、直流と同じ式で電力が求められる。抵抗素子では交流電流が流れると電力消費が起こるということを理解してほしい。

2) コイルの場合

コイルの場合も図のように、交流電圧をかけて、交流電流 $I = I_0 \sin \omega t$ が流れたとき、誘起する電圧は

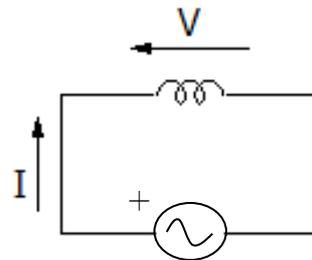
$$V = L \frac{dI}{dt}$$

$$= \omega L I_0 \cos \omega t = \omega L I_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。このときに、電流の振幅に対する電圧の比、インピーダンス $|Z|$ は

$$|Z| = \omega L$$

となる。これは誘導性リアクタンスとも呼ばれる。上の式をみてわかるように、コイルにおいては、電流の位相に対して、電圧の位相は $\pi/2$ 進むことになる。コイルのインピーダンスには ω が入っており、周波数が高くなるほどインピーダンスは高くなるといえる。



ここで、コンデンサに交流電圧をかけたときの、電力を計算してみる。 $I = I_0 \sin \omega t$ 、さらに $V = \omega L I_0 \cos \omega t$ として、一周期分の平均電力を計算する。

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^T VI dt / T \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \omega L I_0 \cos \omega t \cdot I_0 \sin \omega t dt \\
 &= \frac{\omega L I_0^2}{T} \int_0^T \frac{\sin 2\omega t}{2} dt \\
 &= \frac{L I_0^2}{4T} [-\cos 2\omega t]_0^T = 0
 \end{aligned}$$

以上の計算からわかるように、電流と電圧はコイルにおいては直交関係にあり、

積分すると 0 となる。コイル自体の消費電力はないことを覚えておいてほしい。

3) コンデンサの場合

次にコンデンサの場合について考えてみる。交流電圧をかけて、交流電流 $I = I_0 \sin \omega t$ の電流が流れたとき、誘起する電圧は

$$V = \frac{1}{C} \int Idt = \frac{-I_0}{\omega C} \cos \omega t$$

$$= \frac{I_0}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。インピーダンス $|Z|$ は

$$|Z| = \frac{1}{\omega C}$$

となる。このインピーダンスは容量性（キャパシタンス性）リアクタンスとも呼ばれる。上の式をみてわかるように、コンデンサにおいては、電流の位相に対して、電圧の位相は $\pi/2$ 遅れることになる。コンデンサのインピーダンスには ω の逆数が入っており、周波数が高くなるほどインピーダンスは低くなるといえる。

コンデンサにおいても、コイルと同様の計算になるが、電圧と電流の位相差が $\pi/2$ であり、これも直交関係にあり、電力消費はない。コンデンサの電力消費はないと覚えてほしい。

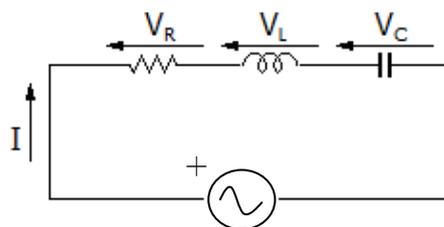
以上、RLC 素子の特性をまとめてみた。この関係はそのまま覚えておきたい。

素子	抵抗 R	コイル L	コンデンサ C
インピーダンス $ Z $	R	ωL	$\frac{1}{\omega C}$
電流に対する電圧の位相	0	$\pi/2$ 進む	$\pi/2$ 遅れる

5. R-L-C 直列回路のインピーダンス

ここからが電気回路の本番とお考えいただきたい。R-L-C 直列回路は回路のインピーダンスの基本概念を学ぶ良い題材であり、この例を通して、力率や有効電力、無効電力の概念を学んでいく。

図のような直列回路を考えたときに、R-L-C 直列回路に誘起される電圧を計算してみる。キルヒホッフの第一法則より、R-L-C のどの素子においても、流れる電流は等しく、 $I = I_0 \sin \omega t$ とする。



各素子の電圧は次のように求められる。

$$V_R = RI_0 \sin \omega t$$

$$V_L = \omega LI_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$V_C = \frac{I_0}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

この足し合わせを計算する上で単振動の合成の式を用いて導出をする。

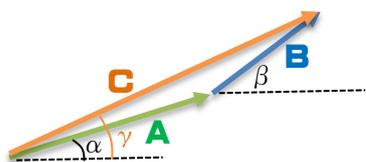
ポイント 単振動の合成の式

異なる位相の三角関数の和は一つの三角関数に変換できる。次の式が成り立つが、このときに、長さ A、B、C、位相角 α 、 β 、 γ について次の作図ができる。

$$A \sin(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \beta)$$

$$= C \sin(\omega t + \gamma)$$

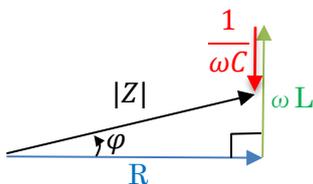
第一項を長さ A で水平に対して角度 α のベクトルで表す。第二項も同様である。



このような図をベクトル図というが、ベクトル A とベクトル B を足し合わせできるベクトルの長さが C になり、右項の位相角もそのベクトルの角度となる。この計算を使って合成電圧を求める。

$$\begin{aligned}
 V &= V_R + V_L + V_C \\
 &= I_0 \left\{ R \sin \omega t + \omega L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\
 &= |Z| I_0 \sin(\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

としたときに、次の作図がなりたつ。



$|Z|$ はこの R-L-C 直列回路のインピーダンスであり、その大きさは直角三角形の斜辺の長さになる。

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

で表される。また位相角 φ は

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

で表される。この位相角は、インピーダン

スの位相角とも呼ばれる。

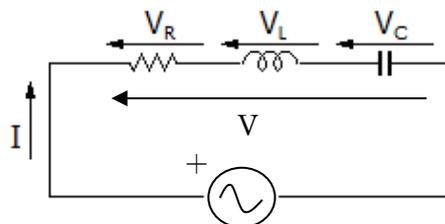
上記で求めた $|Z|$ は、電流の振幅に対する電圧振幅の比である。

$\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$ の場合、位相角 φ は正になる。この場合を R-L-C 直列素子は **インダクタンス性** となり、**電流に対して電圧の位相は進む** ということになる。インダクタンス性とは、この直列素子がコイルに近い働きをしているという意味である。

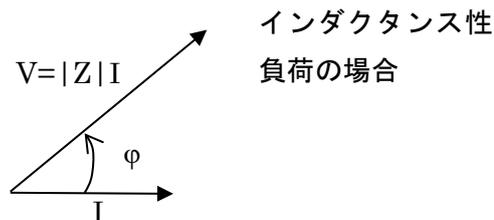
$\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$ の場合、位相角 φ は負になる。この場合を R-L-C 直列素子は **容量性** であり、**電流に対して電圧の位相は遅れる** ということになる。

6. R-L-C 直列回路のベクトル図による表現

再掲になるが、次のような R-L-C 直列回路に交流電圧がかけられているときに、次のようなベクトル図をかくことができる。

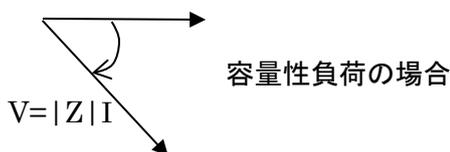


ベクトル図はこの場合は電流を基準とし水平に書いてみる。



電流に対して、インピーダンスの位相角

分だけ、傾けた方向に、電流の $|Z|$ 倍の長さの矢印を書けば 電圧のベクトルがかかる。容量性負荷の場合は、次のようになる。



ベクトル図は電気回路の世界で、しばしば多用される。

ポイント ベクトル図

- ① 矢印の長さは振幅、あるいは実効値を表す。
- ② 矢印の仰角は位相角を表す。
- ③ 電流の長さ×インピーダンスの大きさ＝電圧の大きさ
- ④ 電圧に位相角－電流の位相角＝インピーダンスの位相角

7. R-L-C 直列回路のインピーダンスの周波数依存性

これまでの解説を見ていただいでわかるように、インピーダンスには大きさと位相角がある。インピーダンスを表す記号として Z をしばしば使うが、その大きさと位相角を表すために、 $|Z|$ と $\angle Z$ とそれぞれ表現される。後の章ではこれらの情報を複素数で表されることを学ぶが、ここでは大きさと角度があることに意識していただきたい。

R-L-C 直列回路のインピーダンスの大きさ $|Z|$ は次のように書くことができる。

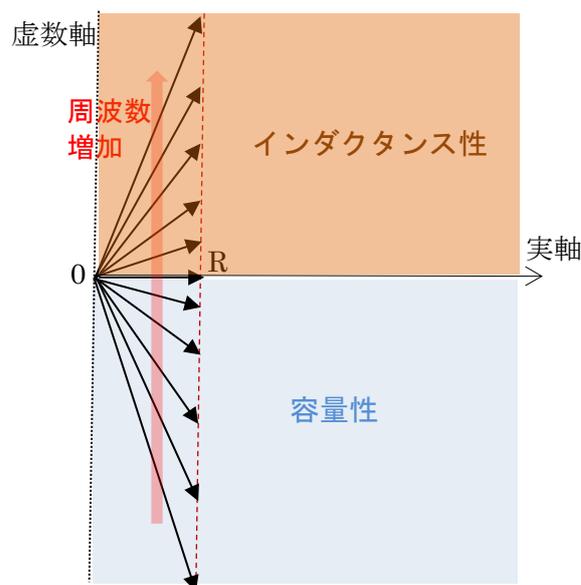
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

この中で、 $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ は周波数依存項であり、 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ のときに、ゼロになる。つまり、インピーダンス $|Z| = R$ となり、直列共振回路は、単純に L と C は無視でき、 R とみなせる。このときを直列共振状態と呼び、共振条件は

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{つまり、} \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

となる。このときの f を共振周波数という。直列共振にあるとき、インピーダンス $|Z|$ は最小の R となり、位相角 $\angle Z = 0$ となる。

周波数 f を 0 から ∞ に変化させたときに、ベクトル図がどうなるかみてみよう。



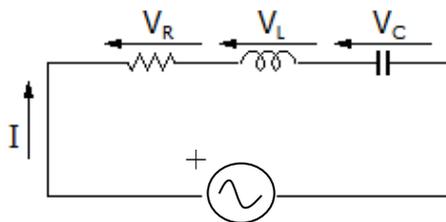
このベクトル図を 2 次元座標で、横軸を実軸、縦軸を虚数軸とよぶ。周波数が非常に低いときは、 $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$ となり容量性となる。位相角は $-\pi/2$ から周波数が増加すると角度が低くなり、水平位置で共振条件となる。このときインピーダンスのベクトルの長さは最小の R となる。さらに周波数が上がると、インダクタンス

性になり、ふたたびインピーダンスは増加することになる。

R-L-C 直列回路は共振周波数のときに、電流をよく流すとみなすことができる。

8. R-L-C 直列回路の力率と電力消費

R-L-C 直列回路に交流電圧をかけたときに、この回路素子の消費電力を求めてみる。



交流電圧の実効値を V_0 とする。これを瞬時値として表すと、 $V = \sqrt{2}V_0 \sin \omega t$ とする。このとき流れる電流 I は正確に書くと次のようになる。

$$V = \frac{\sqrt{2}V_0}{|Z|} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

前節で述べたように電力消費は抵抗のみで起こる。C や L では電力消費がおこらない。抵抗 R に流れる電流の実効値 I_0 は $V_0/|Z|$ で求められる。

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

抵抗で消費される電力は有効電力 P_E と呼ばれるが、

$$P_E = RI_0^2 = \frac{V_0 I_0 R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

となる。ここで $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ をリアクタンス X

とすると、

$$P_E = V_0 I_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

となる。

この式の $\frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$ はインピーダンスの位相角を φ とすると $\cos \varphi$ となる。この $\cos \varphi$ を力率という。

ここで整理しよう。交流電圧の実効値と電流の実効値の積 $V_0 I_0$ を皮相電力 P_S という。これは名目上の電力であり、実際の消費電力ではないので、単位にワットは使わず、VA (ボルトアンペア) が使われる。

皮相電力

$$P_S = V_0 I_0$$

有効電力

$$P_E = P_S \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = P_S \cos \varphi$$

このほか、無効電力 P_i も求めておく。この無効電力は電力消費にはならないが、L や C などのリアクタンスと電源との間で行ったり来たりする電力のことである。この単位はヴァール (VAR) である。

無効電力

$$P_i = P_S \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = P_S \sin \varphi$$

以上を眺めてみて、力率は様々な定義がされる。それは、電流と電圧の位相角差

の余弦(cos)、インピーダンスの位相角の余弦とすることができ、皮相電力に対して実際に消費されている電力の割合という意味をもっている。力をいれて実際に伝わっている率なので、このように呼ばれているのだと思う。

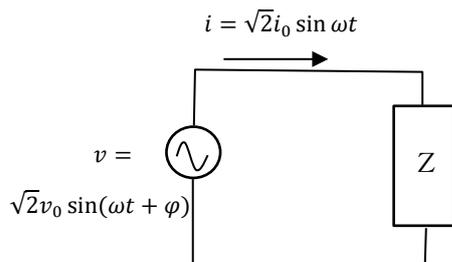
9. 重要 インピーダンスの位相角と力率

R-L-C からなる回路は直列、並列に限らず、どんな組みあわせであっても、インピーダンスの大きさ $|Z|$ と位相角を持つ。ここは一般論として、インピーダンスの大きさ、位相角、力率について解説したい。

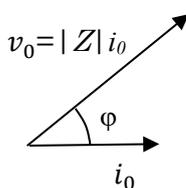
R-L-C からなる素子に、実効値 i_0 の交流電流を流した時に、負荷の両端の交流電圧の実効値が v_0 だったとする。また電流に対する電圧の位相角を φ とする。これを瞬時値で表せばこうなる。

$$i(t) = \sqrt{2}i_0 \sin \omega t$$

$$v(t) = \sqrt{2}v_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



正弦波は大きさと位相角のベクトルで表示でき、電圧と電流のベクトルはこのようなになる。



電流は i_0 の長さで水平に書き、角度 φ だけ持ち上げた方向に長さ v_0 のベクトルを書けば、それが電圧のベクトルとなる。このとき、インピーダンスも位相角をもち、インピーダンス角度を $\angle Z$ とすれば、

$$\angle Z = \angle v - \angle i$$

とすることができ。インピーダンス位相角は電流に対する電圧の位相(差)となる。何度も解説してきたが、インピーダンスの大きさ $|Z|$ は、電流の実効値に対する電圧実効値の比になる。

$$|Z| = \frac{v_0}{i_0}$$

インピーダンスの位相角 φ の余弦 $\cos \varphi$ はインピーダンスの力率となる。インピーダンスの力率は、負荷に電圧を実効値 v_0 でかけたときに、そこを流れる電流の実効値が i_0 であるときに、実質消費する電力、すなわち有効電力 P_r は、

$$\text{有効電力 } P_r = v_0 i_0 \cos \varphi$$

となる。この式が導かれることを数式で説明する。電流と電圧が周期的に変化するときに、その消費電力 P は、電流と電圧の積を一周期 T の区間で積分し、周期 T で割ることで求められる。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)v(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{2}i_0 \sin \omega t \cdot \sqrt{2}v_0 \sin(\omega t + \varphi) dt$$

$$= 2i_0 v_0 \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) dt$$

$$= 2i_0 v_0 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (-\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(-\varphi)) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= i_0 v_0 \frac{1}{T} \left[-\frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{2\omega} + t \cos \varphi \right]_0^T \\
 &= i_0 v_0 \frac{1}{T} \left[-\frac{\sin(2\omega T + \varphi)}{2\omega} + \frac{\sin(\varphi)}{2\omega} \right. \\
 &\quad \left. + T \cos \varphi \right]
 \end{aligned}$$

ここで、 $\sin(2\omega T + \varphi)$ であるが、周期Tは $2\pi/\omega$ なので $\sin(4\pi + \varphi)$ となり、これは $\sin(\varphi)$ である。つまり上式の第一項と二項は相殺されるので、与式は

$$P = i_0 v_0 \cos \varphi$$

となる。

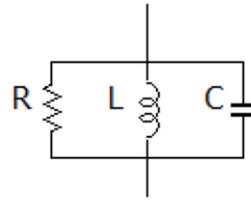
ポイント

- ① 負荷に交流電流が流れるときに、電流の実効値に対する、電圧の実効値の比はインピーダンスの大きさ|Z|である。(インピーダンスの大きさ)
- ② 電流に対する電圧の位相(差)はインピーダンスの位相角である。(インピーダンスの位相角)
- ③ 電流、電圧の位相差の余弦($\cos \varphi$)が力率になる。(力率)
- ④ 電流と電圧の実効値に力率をかければ、実質の電力消費、つまり有効電力となる。(有効電力)
- ⑤ 電流、電圧の位相差の正弦 $\sin \varphi$ を使えば、電流と電圧の実効値と $\sin \varphi$ の積が無効電力となる。(無効電力)

10. R-L-C 並列回路

つぎのような R-L-C 並列回路についても、直列回路にときにおこなっていた単

振動の合成の計算を行えば、インピーダンスおよびその位相角を求めることができる。この節では結果のみを記述する。



通常、R-L-C 回路においてはインピーダンスZの代わりにアドミッタンスYを使う。アドミッタンスはインピーダンスの逆数であり、電圧に対する電流の比を表す。

$$|Y| = \frac{1}{|Z|} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

位相角であるが、

$$\angle Y = -\angle Z = \tan^{-1} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{1/R}$$

となる。位相角の世界では、インピーダンスの位相角はアドミッタンスの位相角の符号を変えた数値になる。

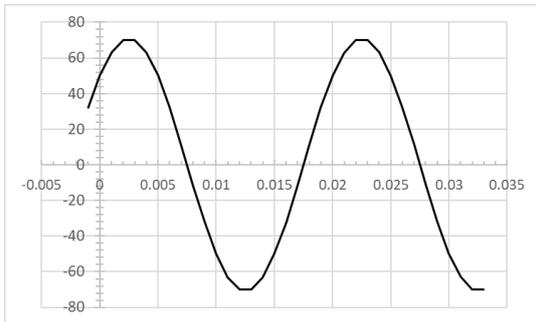
共振状態、すなわち

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{つまり、} \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

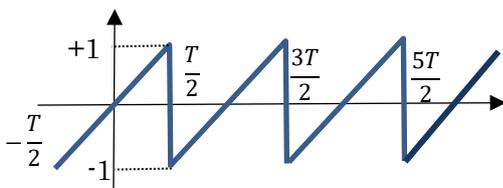
のとき、これは式として直列共振状態と同じであるが、CとLの並列の部分はインピーダンス ∞ 、アドミッタンスは0となる。つまり、LとCの並列共振回路は、共振周波数のときに、電流を流さない回路として働く。

3章 練習問題

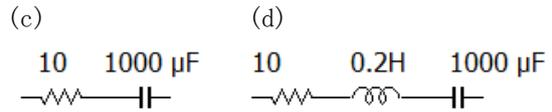
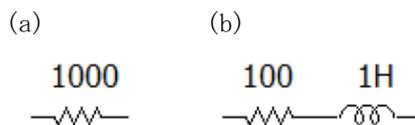
1. 実効値 20V、周波数 40Hz、位相角 $\pi/6$ の交流波形を書きなさい。
2. 次の交流電圧の実効値、周波数、位相角を読み取りなさい。横軸は時間で単位は秒、縦軸は電圧の瞬時値であり、単位は V である。



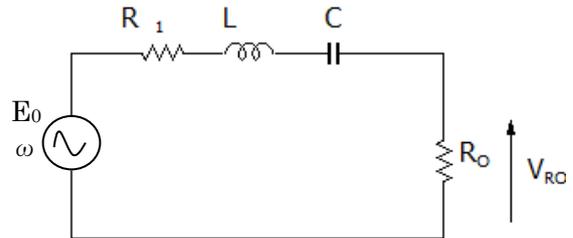
3. 次の単振動の波の合成を計算しなさい。
 - (a) $10\sin\omega t + 5\sin(\omega t + \pi/4)$
 - (b) $10\sin\omega t + 10\cos\omega t$
4. 次の波形のフーリエ級数展開を求めよ。



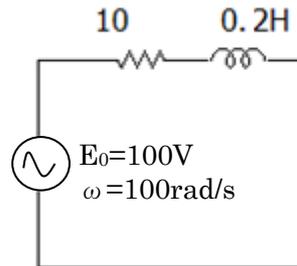
5. 次の素子のインピーダンス $|Z|$ とインピーダンスの位相角 $\angle Z$ を求めよ。角周波数は 100 rad/s とする。



6. 次の回路において、抵抗 R_0 に発生する電圧 V_{R_0} の瞬時値を求めよ。また最大になるときの角周波数 ω を求めよ。



7. 次の回路において、有効電力 P_E 、無効電力 P_i 、力率を求めよ。また力率を最大とするには、この直列回路にどんな素子を挿入したらよいか。

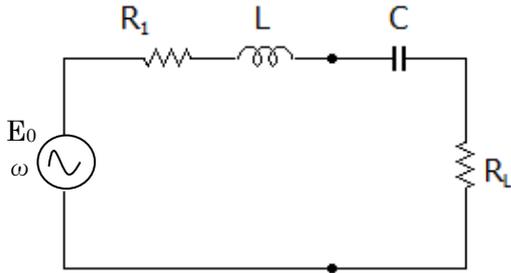


8. ある素子に 100V の交流電圧をかけたときに、電流は 30A 流れた。消費電力が 1200W であったときに、この素子のインピーダンス $|Z|$ と力率 $\cos\phi$ を求めよ。

9. ある素子に 100A の交流電流を流した時に、その素子の起電力は 20V であった。オシロスコープで電流と電圧の波形をみたところ、電流は電圧に対して位相角として $\pi/6$ だけ遅れていることが分かった。この素子は、インダクタンス性であろうか、それともキャパシタンス性であろうか。この素子の力率 $\cos\phi$ を求め、有効電力 P_E を求めなさい。

10. 次の回路において、回路に流れる電流が最大になるときの角周波数 ω を求めなさい。このとき、 R_L は自由に変更できるものと

し、消費電流が最大になるとき R_L の値を求めよ。



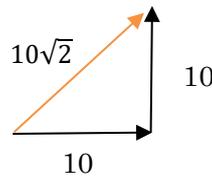
$$14.0 \sin(\omega t + 0.256)$$

(b) $10 \sin \omega t + 10 \cos \omega t$

\cos の項は \sin 波が $\pi/2$ だけ進みマイナスになる。

$$\cos \omega t = -\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

んでいると考える。



合成ベクトルの角度も $-\pi/4$ である。

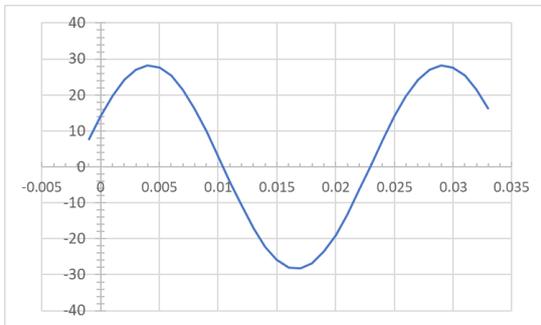
合成波は

$$10\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/4)$$

となる。

3章 練習問題略解

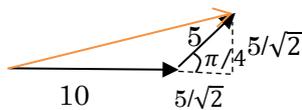
1.



2. 実効値 50V、周波数 50Hz、位相角は $\pi/4$

3.

(a) $10 \sin \omega t + 5 \sin(\omega t + \pi/4)$



橙のベクトルが合成正弦波を表す。橙のベクトルの長さ

$$\sqrt{(10 + 5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = 14.0$$

橙のベクトルの角度は

$$\tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{10+5\sqrt{2}}\right) = 0.256 \text{ rad}$$

合成波は次の通り

4. この波形も奇関数である。この場合は赤字に示す部分積分を使う。

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2t}{T} \sin n\omega t \, dt = \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin n\omega t \, dt =$$

$$\frac{8}{T^2} \left[-t \frac{\cos n\omega t}{n\omega} \right]_0^{T/2} - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} -\frac{\cos n\omega t}{n\omega} \, dt$$

$$= \frac{8}{T^2} \left(-\frac{T \cos n\omega T/2}{2 n\omega} \right) + \left[\frac{\sin n\omega t}{(n\omega)^2} \right]_0^{T/2}$$

$$= -\frac{4}{4n\pi} (\cos n\pi) = \frac{-1}{n\pi} (-1)^n$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \quad n=1, 2, \dots$$

フーリエ級数展開は次のようになる。

$$\frac{2}{\pi} \left\{ \sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right\}$$

5.

(a) $|Z|=1000 \, \Omega \quad \angle Z=0 \text{ rad}$

(b) $|Z|=\sqrt{100^2 + 100^2}=141.4 \, \Omega$

$$\angle Z = \pi/4$$

$$(c) |Z| = \sqrt{10^2 + \left(\frac{1}{0.1}\right)^2} = 14.14 \Omega$$

$$\angle Z = -\pi/4$$

$$(d) |Z| = \sqrt{10^2 + \left(0.2 * 100 - \frac{1}{0.1}\right)^2} = 14.14 \Omega$$

$$\angle Z = \pi/4$$

6.

まずこの回路のインピーダンスを求める。

$$|Z| = \sqrt{(R_1 + R_0)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\angle Z = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_0} \right) \text{となる。}$$

つまり電流の瞬時値は

$$I = \frac{E_0}{|Z|} \sin(\omega t - \angle Z) \text{となる。}$$

電流の位相角は電圧に対してインピーダンスの角度だけ遅れるので、 $\angle Z$ はマイナスの符号になる。 V_{R0} の瞬時の瞬時値は、

$$V_{R0} = \frac{E_0 R_0}{|Z|} \sin(\omega t - \angle Z)$$

となる。これが最大になるのはLとCの直列共振時である。つまり、

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{つまり、} \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

7.

この場合は力率から求めた方が速い。

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{10}{\sqrt{10^2 + (0.2 \times 100)^2}}$$

$$= 0.447$$

インピーダンスの大きさ $|Z|$ は

$$|Z| = \sqrt{10^2 + (0.2 \times 100)^2} = 22.3 \Omega$$

電流の大きさ $|I|$ は

$$|I| = 100/22.3 = 4.48 \text{ A}$$

有効電力 P_E

$$P_E = |V||I|\cos\phi = 100 \times 4.48 \times 0.447 = 200.4 \text{ W}$$

この回路は誘導性であり、コンデンサを直列にすることでインピーダンスを下げるができる。 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ の共振条件の式より、

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = 5 \times 10^{-4} \text{ F}$$

となる。

8. 100Vで30A流れたということは

インピーダンス $|Z|$ は

$$|Z| = 100/30 = 3.33 \Omega$$

皮相電力は $100 \times 30 = 3000 \text{ VA}$

力率 $\cos\phi = 1200/3000 = 0.4$

9. 電流は電圧に対して位相角として $\pi/6$ 遅れているということは、インダクタンス性である。

力率は $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

$$\text{有効電力 } P_E = 100 \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1000\sqrt{3} \text{ W}$$

10. これは共振条件のときにLとCの直列回路は 0Ω となる。すなわち、 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

このときにLとCは無視できる。最大電力条件は、テブナン定理から、内部抵抗と負荷抵抗が等しいときに最大になるので、

$$R_L = R_1$$

となる。