# 第 8 章　ラプラス変換を用いた回路解析

これまで非定常な状態、すなわち過渡状態を微分方程式をたてて解いてきた。ここではラプラス変換を用いて解く方法を学ぶ。ラプラス変換を使うことで、複雑な微分方程式も代数方程式に変えることができる。ラプラス変換は回路の過渡解析のみならず、制御工学のフィードバック理論でもよく使われており、回路を通して運動制御や安定性評価ための下地となる知識を習得できる。

## 1．ラプラス変換を使った微分方程式の解き方のイメージ的理解

ラプラス変換は時間を変数とした関数を次の定義式に従って、 s を複素数による変数とする関数に変換する。（**ラプラス変換**）

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

≧0 の領域を扱うとする。変数 s を**複素周波数**といい、その実数部は正である。ラプラス変換された s の関数は、つぎの式でもって時間 t の関数に戻すことができる。（**ラプラス逆変換**）

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

ここで、σ は正の任意の定数である。実際の使い方であるが、回路の微分方程式をラプラス変換でもって $s$ の代数方程式に変え、求める信号関数を部分分数に分解し、できるだけわかりやすい s の項にして、逆変換で時間軸の関数に変える。

この教科書ではラプラス変換と逆変換を$\mathcal{L}$をつかって次のように表すこととする。

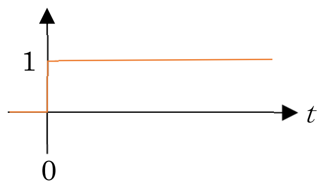
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\,[F(s)] = f(t)$$

これを聞いただけでは何のことかわからないと思うが、これ以降いくつか事例をつかってラプラス変換に慣れていく。難しい計算が多く面倒そうと思われかもしれないが、そんなことはない。ラプラス変換は微分方程式の計算を楽にするための手法であり、覚えておいて損はない。練習でもって慣れていこう。

## 2．基本的な信号のラプラス変換事例

(1) 単位ステップ関数




単位ステップ関数 $u_1(t)$は次のように表すことができる。

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

これをラプラス変換すると、

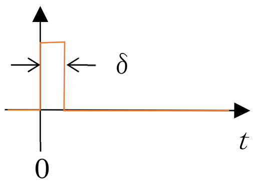
$$\mathcal{L}[u_1(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$\mathcal{L}[u_1(t)] = \frac{1}{s}$　ただし $\mathrm{Re}\{s\} > 0$

となる。$\mathrm{Re}\{s\} > 0$とするのは、計算途中で出てくる$e^{-st}$に、$t = \infty$を代入すると、正であれば 1 になるが、負であると∞に発散してしまうからである。

(2) 単位インパルス

単位インパルス$u_0(t)$はｔ＝0 からδの幅の方形波で、面積 1 を保ったまま、δ→0 の極限を取った関数である。




すなわちｔ＝0 のとき、∞の高さを持ち、面積としては 1 となるパルス関数である。

$$\mathcal{L}[u_0(t)] = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{\delta}\frac{1}{\delta}e^{-st}dt$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{e^{-s\delta}-1}{-s\delta}\right]_0^{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[\frac{-se^{-s\delta}}{-s}\right]_0^{\delta} = 1$$

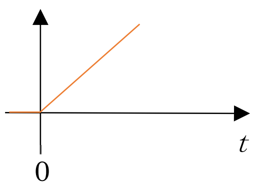
最後の極限であるが、ロピタルの定理を用いて、分子と分母をそれぞれδで微分し、δの極限を求めている。

$$\mathcal{L}[u_0(t)] = 1$$

(3) ランプ関数

時間とともに単調増加する関数をランプ関数という。これをもとめてみよう。

$$u_2(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$




$$\mathcal{L}[u_1(t)] = \int_0^{\infty} te^{-st}dt$$

$$= \left[\frac{te^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$= \left[\frac{te^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty} - \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

但し　$\mathrm{Re}\{s\} > 0$である。

(4) 指数関数

指数関数のフーリエ変換は次のように表される。

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

但し　$\mathrm{Re}\{s+a\} > 0$である。

この関係が回路問題で最も使われる。このほか、参考までに次の信号波形のラプラス変換を載せておく。

主な信号波形とそのラプラス変換

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| 単位インパルス $u_0(t)$ | $1$ |
| 単位ステップ $u_1(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| ランプ関数 $u_2(t)$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 指数関数 $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| 指数関数 $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| 正弦波 $sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 余弦波 $cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |

## 3.　ラプラス変換の基本的な性質

(1)関数の加減算

ラプラス変換の変換式からみると当たり前のような気もするが、次の式がなりたつ。

加算

$$\mathscr{L}[f(t)+g(t)]=F(s)+G(s)$$

減算

$$\mathscr{L}[f(t)-g(t)]=F(s)-G(s)$$

逆変換も同じように成り立つ。

$$\mathscr{L}^{-1}\,[F(s)+G(s)]=f(t)+g(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\,[F(s)-G(s)]=f(t)-g(t)$$

(2)関数の相似

時間が $a$ 倍になれば、ラプラスの変換後は $1/a$ 倍になると覚える。

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

(5) 関数の変位

時間関数$f(t)$において、$a$ 秒だけ遅れが生じて、$f(t-a)$になった場合、ラプラス変換後に$e^{-as}$をかければよい。

$$\mathscr{L}[f(t-a)]=e^{-as}F(s)$$

また、ラプラス変換後の関数$F(s)$に s において $a$ だけ負に変位が起きて、$F(s-a)$となったときには、逆変換後に、$e^{-at}$をかければよい。

$$\mathscr{L}^{-1}\,[F(s-a)]=e^{-at}f(t)$$

(6) 時間関数の微分

関数$f(t)$の時間微分は次のようにラプラス変換される。

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$$

つまり、初期値$f(0)$を引いて、ラプラス変換の関数$F(s)$に s をかければよい。

n 階微分であればつぎの式が成り立つ。

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f'(0)$$

$$-s^{n-2}f''(0)-\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ -\overbrace{f'''''}^{\boldsymbol{n-1}\text{階微分}}(0)$$

(7) 時間関数の積分

時間関数$f(t)$の一階積分は、1/s をかけるだけである。

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

時間微分と積分のフーリエ変換後の扱いを学んだが、本書ではその導出過程は省いた。勉強を深めたい方は、ぜひ自力で導出してみてほしい。ここで注意すべきこととして、微分も積分もラプラス変換後は、単純に s の掛け算や割り算に帰着することである。この性質が、微分方程式が代数演算に帰着する理由である。

(8) 畳み込み積分

時間関数$f(t)$があって、もう一つの別の関数が、時刻 t ＝0 から t までかけて関数の積として作用しているとする。その積分$f(t)*g(t)$をラプラス変換すると、次のように表すことができる。

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

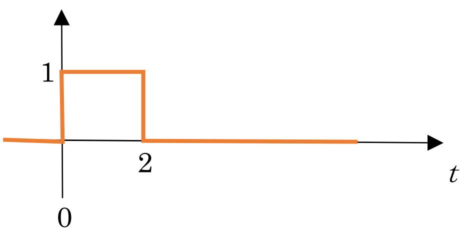
$$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]=F(s)G(s)$$

ある信号の現在値は、過去の信号値か

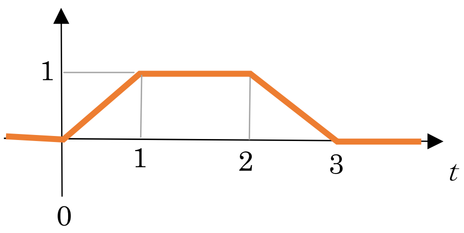
ら別の関数が作用して、現在に反映していて、その現在の数値は過去からの積分で表されるときに、ラプラス変換するとそれぞれの関数のラプラス変換の積になる。電気信号でも様々な遅れを伴う回路を通した時に、出てくる数値は様々な作用関数の畳み込み積分で表されることになるが、ラプラス変換では信号関数と作用関数の積で表され、信号応答の計算に広く活用されている。

$\boxed{\text{例題 1}}$　次の信号をラプラス変換で表せ。

(1)

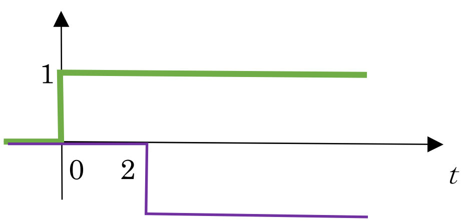



(2)




解答

(1) 全く難しく考えることはない。このような単一方形波は次のステップ関数の組わせとして、ラプラス変換をすればよい。また、定義式を使う必要もない。



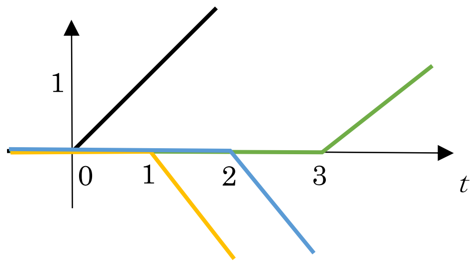

このように、二つのステップ関数の和になると考える。原時間関数は

$u_1(t) - u_1(t-2)$

で表される。第 2 項は、単位ステップ関数の 2 秒遅れの表現である。2 秒遅れはラプラス変換後に、$e^{-2s}$をかければよい。

$$\mathcal{L}[u_1(t) - u_1(t-2)] = \frac{1}{s} - e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

(2)こちらも次のランプ関数の和として考える。




原関数は次にようになる。

$$u_2(t) - u_2(t-1) - u_2(t-2) + u_2(t-3)$$

これをラプラス変換すると次のようになる。

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-2s}\frac{1}{s^2} + e^{-3s}\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})$$

## 4.　ラプラス変換における初期値、終値の定理

回路方程式に基づいて過渡現象を解くことを教えたいが、それに必要な知識として初期値および終値の定理を示す。

時間関数$f(t)$があって、そのラプラス変換が$F(s)$のときに、その初期値$f(0)$は、

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

となり、終値$f(\infty)$は

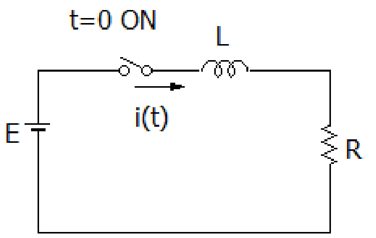
$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

となる。<u>初期値であれば、s をかけて、極限で∞をとる。また、終値は s をかけて、極限で 0 をとる。</u>非常に便利な式なので、忘れずにおきたい。

## 5. 過渡現象解析の例

(1)L-R 回路

ここでは、前章と同じ事例を扱うが、ラプラス変換でアプローチしていく。図のように L と R の直列回路がある。 t ＝0 でスイッチが ON されたときに、流れる電流 $i(t)$を求めてみる。




この回路の微分方程式は次が成り立つ。

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri = Li' + Ri$$

ここで、左項の定数は単位ステップ関数で表す。

$$Eu_1(t) = L\frac{di}{dt} + Ri = Li'(t) + Ri(t)$$

電流$i(t)$のラプラス変換を$I(s)$とすると、次のようになる。

$$\frac{E}{s} = L\big(sI(s) - i(0)\big) + RI(s)$$

この回路における初期電流$i(0)$はコイルが無限大インピーダンスになるので、0 になる。

$$\frac{E}{s} = LsI(s) + RI(s)$$

これを解くと、

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls+R)}$$

となる。ここから、わかりやすい形として部分分数に展開する。

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls+R)} = E\left(\frac{\frac{1}{R}}{s} - \frac{\frac{L}{R}}{Ls+R}\right)$$

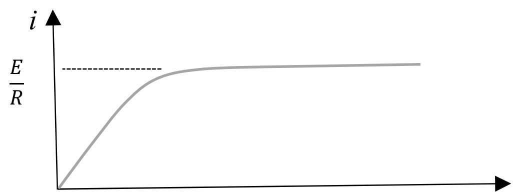
$$= \frac{E}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L}\right)$$

これを逆変換すると、

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(u_1(t) - e^{\frac{R}{L}t}\right)$$

となる。

$i(t)$の形は次のように書ける。




ここで、せっかく勉強した初期値及び終値の定理が正しいことを確かめてみよう。

初期値

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

$$= \lim_{s \to \infty} s\frac{E}{s(Ls + R)} = \lim_{s \to \infty} \frac{E}{Ls + R} = 0$$

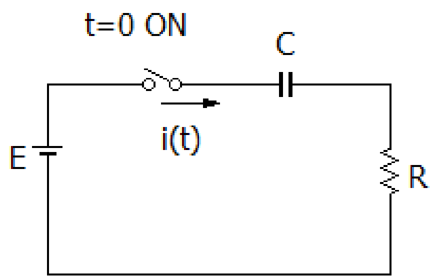
終値

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{E}{Ls+R} = \frac{E}{R}$$

(2)C-R 回路

図のように C と R の直列回路がある。 t ＝0 のときにスイッチが ON されたとして、流れる電流 $i(t)$を求める。C には t

＝0 のときに全く電荷が蓄えられていないとする。




この回路の微分方程式は次が成り立つ。

$$\frac{1}{C}i + Ri' = 0$$

となる。これをラプラス変換すると次のようになる。

$$\frac{1}{C}I(s) + R\big(sI(s) - i(0)\big) = 0$$

この回路の電流初期値は前章に記載されるように、E/R である。

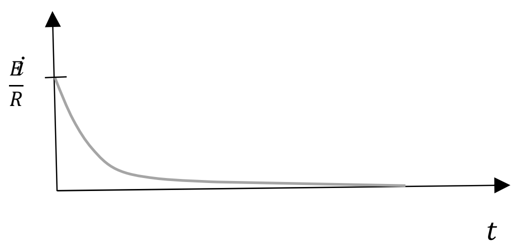
$$\frac{1}{C}I(s) + R(sI(s) - E/R) = 0$$

この式から、

$$I(s) = \frac{E/R}{s+\frac{1}{CR}}$$

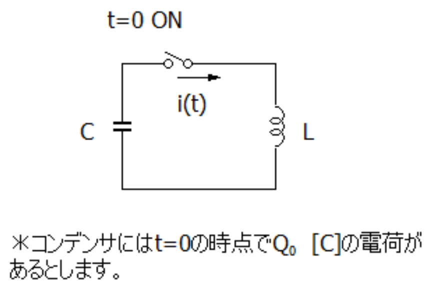
となる。これを逆変換すれば、次の通り求められる。

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$$




(3)L-C 共振回路の事例

時刻 t ＝0 でコンデンサにたまっている電荷が放電されるとする。この電流波形を求める。




次の方程式がたてられる。

$$\frac{1}{C}Q(t) = L\frac{di}{dt}$$

両辺を時間微分する。このとき $i$ の方向は、コンデンサから出ていく方向なので、$i$ にマイナスをつける。

$$-\frac{1}{C}i = Li''$$

となる。

$$i'' + \frac{1}{LC}i = 0$$

ここでラプラス変換する。

$$s^2I(s) - si(0) - i'(0) + \frac{1}{LC}I(s) = 0$$

なお、この回路で初期値$i(0)$はゼロ、$i'(0) = \frac{Q_0}{LC}$である。

$$I(s) = \frac{\frac{Q_0}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

この逆変換であるが、

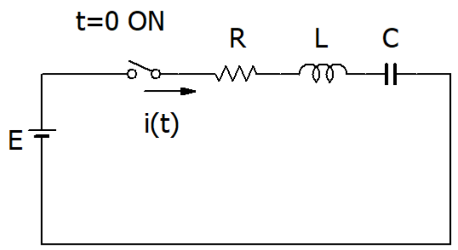
$$i(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\,sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

となる。前章では、苦労して解いたが、ラ

プラス変換では極めて直感的に微分方程式が解けることを感じていただきたい。

(4)R-L-C 直列回路

　こちらも、前章で詳しく解説してみたが、ラプラス変換で電流の形を調べてみよう。




電流の回路方程式は次のように書くことができる。なおコンデンサの t=0 の時の電荷を 0 とすると

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

となる。これをラプラス変換すると、

$$E\frac{1}{s} = RI(s) + LsI(s) + \frac{I(s)}{Cs}$$

となる。なお初期電流 $i(0)$は 0 である。したがって、

$$I(s) = \frac{E}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \qquad (1)$$

の形になる。

　ここから電流波形の形を予想する。(1)式の分母を 0 として、 s の二次方程式を考える。

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0$$

　この式において、判別式が正の場合$\left(R^2 - \frac{4L}{C} > 0\right)$、s は実数解をもち、

(1)式は、

$$I(s) = \frac{C_1}{s+\alpha} + \frac{C_2}{s+\beta} \qquad (2)$$

の形になる。つまり、指数関数となる。

　判別式が負の場合$\left(R^2 - \frac{4L}{C} < 0\right)$は、(2)式の $\alpha$、$\beta$ に複素数が入り、振動減衰波形になる。

**参考　部分分数展開法**

　ラプラス変換を用いた微分方程式の解法ではしばしば部分分数に展開を行うことになる。素早く計算する方法として展開法を解説する。

1)部分分数の係数決定法

 s の分数が与えられた時に、まず分母を因数分解する。

$$F(s) = \frac{C_1}{s^2 + C_2 s + C_3}$$

仮にこれが次のように因数分解できたとする。

$$F(s) = \frac{C_1}{(s-\alpha)(s-\beta)}$$

この場合、次のように部分分数を展開できると考える。

$$F(s) = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta}$$

ここで、係数 A と B を決定するには、

$$A = (s-\alpha)F(s)|_{S=\alpha}$$

$$B = (s-\beta)F(s)|_{S=\beta}$$

となる。この方法がつかえるのはすべて異なる項で因数分解できたときである。

2)分母に二条項が出てきた場合

s の分数として分母が s の三次関数であったとして、

$$F(s)=\frac{C_1}{s^3+C_2s^2+C_3s+C_4}=\frac{C_1}{(s-\alpha)^2(s-\beta)}$$

と因数分解されたとする。この場合、部分分数に分けると、次のようになる。

$$F(s)=\frac{As+B}{(s-\alpha)^2}+\frac{C}{s-\beta}$$

分母が$(s-\alpha)^2$の項については、分子は s の一次式になることに注意されたい。

C については、

$$C=(s-\beta)F(s)|_{S=\beta}$$

で求めることができる。残る A と B であるが、C は決定しているとして、

$$F(s)=\frac{As+B}{(s-\alpha)^2}+\frac{C}{s-\beta}$$
$$=\frac{(As+B)(s-\beta)+C(s-\alpha)^2}{(s-\alpha)^2(s-\beta)}$$
$$=\frac{As^2+(B-A\beta)s-B\beta+Cs^2-2\alpha s+\alpha^2}{(s-\alpha)^2(s-\beta)}$$
$$=\frac{(A+C)s^2+(B-A\beta-2\alpha)s-B\beta+\alpha^2}{(s-\alpha)^2(s-\beta)}$$
$$=\frac{C_1}{(s-\alpha)^2(s-\beta)}$$

とし、係数比較法から、

$$A+C=0$$

$$B-A\beta-2\alpha=0$$

$$-B\beta+\alpha^2=C_1$$

となり、A と B を決定してく。

例題２　つぎの関数を部分分数展開せよ。

(a)

$$\frac{5s+7}{s^2+3s+2}$$

(b)

$$\frac{3s^2+6s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

解答

(a)　原関数は次のように分母を因数分解でき、つぎのように部分分数に分解できると考える。

$$\frac{5s+7}{s^2+3s+2}=\frac{5s+7}{(s+1)(s+2)}$$
$$=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+1}$$

$$A=\frac{5s+7}{(s+1)(s+2)}\times(s+1)\Big|_{s=-1}$$
$$=\frac{5s+7}{(s+2)}\Big|_{s=-1}=2$$
$$B=\frac{5s+7}{(s+1)(s+2)}\times(s+2)\Big|_{s=-2}$$
$$=\frac{5s+7}{(s+1)}\Big|_{S=-2}=3$$

以上より、

$$\frac{5s+7}{s^2+3s+2}=\frac{2}{s+1}+\frac{3}{s+2}$$

となる。

(b)　これも次のように部分分数展開ができると考える。

$$\frac{3s^2+6s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-3}$$

$$A=\frac{3s^2+6s-1}{(s+2)(s-3)}\Big|_{s=-1}=1$$
$$B=\frac{3s^2+6s-1}{(s+2)(s-3)}\Big|_{s=-1}=1$$
$$C=\frac{3s^2+6s-1}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-1}=1$$

したがって、次のように部分分数に分解できる。

$$\frac{3s^2+6s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s-3}$$

## 8 章　練習問題

1. 次の微分方程式をラプラス変換しなさい。$y$ は時間の関数であり、$y'(0) = 0$、$y(0) = 0$とする。

(1)

$$y'' + 5y' + 4 = 0$$

(2)

$$y'' + 2y' + 1 = 0$$

(3)

$$y'' + 2y' + 3 = 0$$

2. 時間関数 $y$ のラプラス変換が Y とされるときに、次の Y の時間関数を求めなさい。

(1)

$$Y = \frac{1}{s^2+5s+4}$$

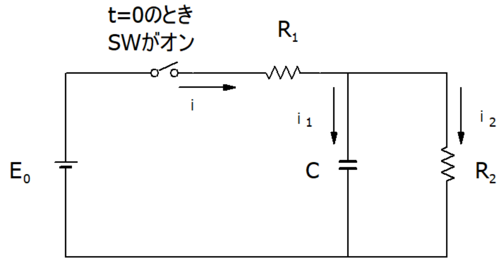
(2)

$$Y = \frac{1}{s^2+2s+1}$$

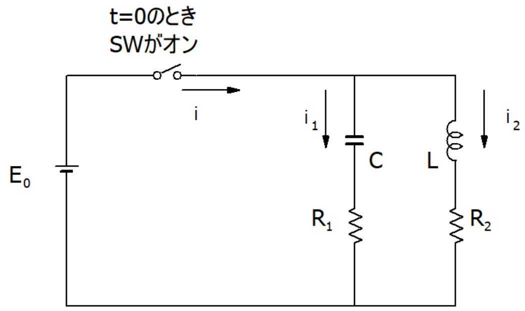
(3)

$$Y = \frac{1}{s^2+2s+3}$$

3. 次の回路の電流 $i$ の時間関数をラプラス変換を用いて解きなさい。ただしコンデンサの t=0 のときの電荷はゼロとする。




4. 次の回路の電流 $I$ をラプラス変換した形で求め、波形が $R_1$、$R_2$、C、L によってどのような形になるのか示しなさい。ただしコンデンサの t=0 のときの電荷はゼロとする。



## 8 章　練習問題略解

1.

(1)

$$y'' + 5y' + 4 = 0$$

ラプラス変換すると次のようになる。$y''$は初期値がゼロであり、$s^2$をかければよい。$y'$は同様に$s$をかければよい。

$$s^2Y + 5sY + 4 = 0$$

(2)

$$s^2Y + 2sY + 1 = 0$$

(3)

$$s^2Y + 2sY + 3 = 0$$

2.

(1)

$$Y = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

これを部分分数に展開すると、

$$Y = \frac{1}{(s+4)(s+1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1}$$

$A$と$B$は係数である。これらは未定係数決定法で解いていく。

$$A = \frac{1}{(s+4)(s+1)} \times (s+4)\Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{s+1}\Big|_{s=-4} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1}{(s+4)(s+1)} \times (s+1)\Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{s+4}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{3}$$

$$Y = \frac{1}{(s+4)(s+1)} = \frac{-1/3}{s+4} + \frac{1/3}{s+1}$$

ここから逆変換すると次のようになる。

$$y = -{}^{1}/_{3}\, e^{-4t} + {}^{1}/_{3}\, e^{-t}$$

(2)

$$Y = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

これは、分母に二乗項が入る形となる。

$Y = \frac{1}{(s+1)^2}$となり、71 ページの逆変換表によれば、つぎのようになる。

$$y = te^{-at}$$

(3)

$$Y = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

$$= \frac{1}{\left(s = \frac{-2+\sqrt{-8}}{2}\right)\left(s - \frac{-2-\sqrt{-8}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{(s+1-\sqrt{2}j)(s+1+\sqrt{2}j)}$$

$$= -\frac{j/_{2\sqrt{2}}}{s+1-\sqrt{2}j} + \frac{j/_{2\sqrt{2}}}{s+1+\sqrt{2}j}$$

これを逆変換すると、

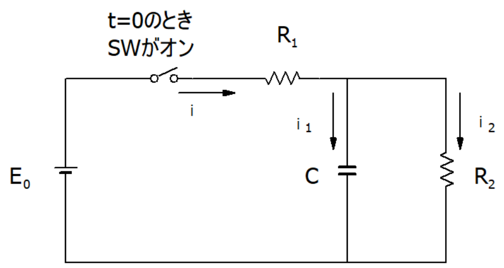
$$y = -\frac{j}{2\sqrt{2}}e^{-(1-\sqrt{2}j)t} + \frac{j}{2\sqrt{2}}e^{-(1+\sqrt{2}j)t}$$

$$= \frac{j}{2\sqrt{2}}e^{-t}\{-cos(\sqrt{2}t) - jsin(\sqrt{2}t) + cos(-\sqrt{2}t) + jsin(-\sqrt{2}t)\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}sin(\sqrt{2}t)$$

となる。この関数は、減衰振動波形になる。

3.




次の回路方程式が成り立つ。

$$\mathrm{E} = R_1 i + \frac{1}{C}\int_0^t i_1 dt$$

$\mathrm{E} = R_1 i + R_2 i_2$

$\frac{1}{C}\int_0^t i_1 dt = R_2 i_2$

$i = i_1 + i_2$

これをラプラス変換すると次のようになる。

$\frac{\mathrm{E}}{s} = R_1 I + \frac{1}{sC} I_1$　　（1）

$\frac{\mathrm{E}}{s} = R_1 I + R_2 I_2$　　（2）

　この式において、コイルは急な電圧変化に対して無限大インピーダンスをとり、$i_2(0) = 0$とした。さらに、

$\frac{1}{sC} I_1 = R_2 I_2$　　（3）

$I = I_1 + I_2$　　（4）

となる。

（3）と（4）式から、

$$I = I_1 + \frac{1}{sCR_2} I_1$$

となる、これを（1）式に代入すると、

$$\frac{\mathrm{E}}{s} = R_1 I + \frac{1}{sC} \cdot \frac{I}{1 + \frac{1}{sCR_2}} = I\left(R_1 + \frac{1}{sC + \frac{1}{R_2}}\right)$$

$$I = \frac{E(CR_2 s + 1)}{s(sCR_1R_2 + R_1 + R_2)} = \frac{E\left(s + \frac{1}{CR_2}\right)}{R_1 s\left(s + \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}\right)}$$

$$= E\left\{\frac{\frac{R_1}{R_1(R_1+R_2)}}{s} + \frac{\frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)}}{s + \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}}\right\}$$

これを逆変換すると

$$i = \frac{ER_1}{R_1(R_1+R_2)} + \frac{ER_2}{R_1(R_1+R_2)} e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}$$

4. 次の回路方程式が成り立つ。

$\mathrm{E} = R_1 i_1 + \frac{1}{C}\int_0^t i_1 dt$

$\mathrm{E} = R_2 i_2 + \mathrm{L}\frac{di_2}{dt}$

$i = i_1 + i_2$

これをラプラス変換すると次のようになる。

$\frac{\mathrm{E}}{s} = R_1 I_1 + \frac{1}{sC} I_1$　　（5）

$\frac{\mathrm{E}}{s} = R_2 I_2 + s\mathrm{L} I_2$　　（6）

$I = I_1 + I_2$　　（7）

（5）と（6）式から、

$$I = \frac{\mathrm{E}}{s} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC}} + \frac{\mathrm{E}}{s} \cdot \frac{1}{R_2 + sL}$$

$$= \frac{\mathrm{E}}{R_1} \frac{1}{\mathrm{s} + \frac{1}{CR_1}} + \frac{\mathrm{E}}{L} \frac{1}{s\left(\mathrm{s} + \frac{L}{R_2}\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{E}}{R_1} \frac{1}{\mathrm{s} + \frac{1}{CR_1}} + \frac{\mathrm{E}}{R_2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\mathrm{s} + \frac{L}{R_2}}\right)$$

ここから逆変換すると次のようになる。

$$i = \frac{\mathrm{E}}{R_1} e^{-\frac{1}{CR_1}t} + \frac{\mathrm{E}}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{L}{R_2}t}\right) = \frac{\mathrm{E}}{R_2} + \frac{\mathrm{E}}{R_1} e^{-\frac{1}{CR_1}t} - \frac{\mathrm{E}}{R_2} e^{-\frac{L}{R_2}t}$$