第９章　パルス波のフーリエ変換による解析

これまで回路の信号を定常的である、例えば正弦波や直流として扱ってきた。実際の回路では非定常の信号も扱う。繰り返しのないパルス信号の場合もある。フーリエ級数の知識をもってすれば、周期波はその周波数の整数倍の余弦波、正弦波の和で表されるように、パルス波も様々な周波数成分を持つ余弦波、正弦波の集まりとしてあらわされる。パルス波がどのような周波数成分を含むのかを知るにはフーリエ変換を使う。様々な信号を扱う電気回路では、数学になるがフーリエ変換による周波数分析は重要であり、この章でそれを学ぶことにする。

１．フーリエ変換

時間関数$f(t)$を信号波とする。信号波が周期Ｔをもち、その角周波数$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$とすると、信号波は次のように正弦波、余弦波の和で表されることを、フーリエ級数の概念として我々は既に学んでいる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \qquad (1)$$

この式において、フーリエ級数係数のa_n、b_nは、次のように表される。

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \quad n=1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\, dt \quad n=1,2\cdots$$

フーリエ級数の表現は、正弦波、余弦波を用いる代わりに、複素数である$e^{j\omega_0 t}$を用いて、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n e^{jn\omega_0 t}\right) \qquad (2)$$

と表すことができる。このときに、フーリエ級数係数c_nは次のように表すことができる。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{jn\omega_0 t}dt$$

オイラーの式を使って(1)式を変換すると、（2）式が得られる。

以上は周期波の話であるが、信号波の時間関数$f(t)$がパルスであり、１回しかない、すなわち∞の周期をもつと考える。そこで、(2) 式を$n\omega_0 = \omega$として書き換えたのが、フーリエ変換の式である。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

この式において、$F(\omega)$が時間関数$f(t)$の**フーリエ変換**であり、$F(\omega)$から時間関数$f(t)$に戻すことを**フーリエ逆変換**という。時間関数$f(t)$のフーリエ変換は、ωの関数であることからわかる通り、角周波数における成分、つまり角周波数スペクトルを表す。

２．フーリエ変換の性質

フーリエ変換には次の基本的な性質がある。時間関数$f(t)$、$g(t)$のフーリエ変換

後の関数を$F(\omega)$、$G(\omega)$とする。

（１） 関数の加減算

$$af(t)+bg(t)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} aF(\omega)+bG(\omega)$$

ここでa,bは比例係数である。元関数の和差、定数倍は、フーリエ変換後の和差、定数倍になる。

（２） フーリエ変換の対称性

次のフーリエ変換の関係が成り立つなら、関数形をそのままに逆の関係もなりたつ。

$$f(t)\quad\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\quad F(\omega)$$

$$F(t)\quad\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\quad 2\pi f(-\omega)$$

これは定義式をみれば容易に成り立つことが分かる。

（３） 時間の定数倍の扱い

時間軸が定数倍になった場合、フーリエ変換後は角周波数ωが 1/a 倍になり、またフーリエ変換関数も 1/|a|倍になる。

$$f(at)\quad\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\quad\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

（４） 時間遅れの扱い

元の関数が a 秒遅れると、フーリエ変換後には$e^{-j\omega a}$をかけることになる。この関数はフーリエ変換後の関数の位相を変化させるだけで、振幅に影響はない。

$$f(t-a)\quad\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\quad e^{-j\omega a}F(\omega)$$

（５） 周波数の変更時間遅れの扱い

元の関数に$e^{j\omega_0 t}$がかけられた場合、意味としては元関数の周波数をω_0だけプラスしたことになる。フーリエ変換後は、周波数軸がω_0だけ、プラスにシフトする。

$$e^{j\omega_0 t}f(t)\quad\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\quad F\big(j(\omega-\omega_0)\big)$$

（６） 元関数の時間微分、時間積分

一階微分

$$\frac{df(t)}{dt}\quad\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\quad j\omega F(\omega)$$

n 階微分

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n}\quad\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\quad (j\omega)^n F(\omega)$$

時間積分

$$\int_{-\infty}^{t} f(\xi)d\xi\ \rightarrow\quad\frac{1}{j\omega}F(\omega)$$

３．様々な関数のフーリエ変換

(1) δ 関数（単位インパルス）

デルタ関数は実際にはありえない関数であるが、その周波数成分はゼロから∞までの様々な周波数の一定の振幅の波の合成で表される。

デルタ関数とは、

$$\delta(\mathrm{t})=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

で、その積分は 1 である。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathrm{t})dt=1$$

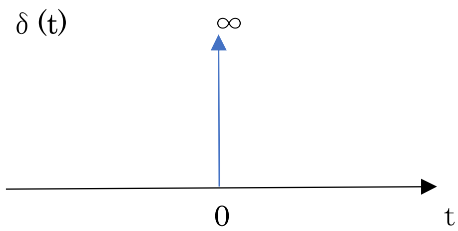
またg(t)を任意の関数とするときに、次の積分が成り立つことが知られている。

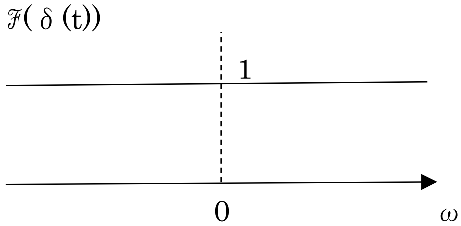
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\mathrm{t})g(t)dt=g(0)$$

このフーリエ変換は次のようになる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{t}) e^{-j\omega t} dt$$
$$= e^0 = 1$$

となる。デルタ関数はフーリエ変換すると 1 となり、周波数軸でみたら 0 から∞の範囲で一定の 1 をとる。時間軸 t と角周波数軸 ω で次のような関係がある。記号$\mathcal{F}$はフーリエ変換されたという意味である。

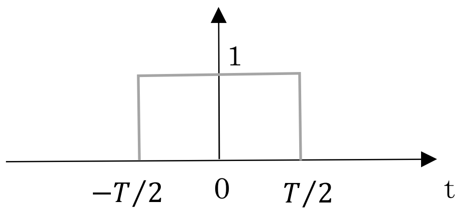




(2) ボックス関数

$$f(\mathrm{t}) = \begin{cases} 1 & -T/2 \leq \ t \leq T/2 \\ 0 & t < -T/2, t > T/2 \end{cases}$$

　これは、幅 T 秒の間だけ 1 の振幅をもつ信号となる。

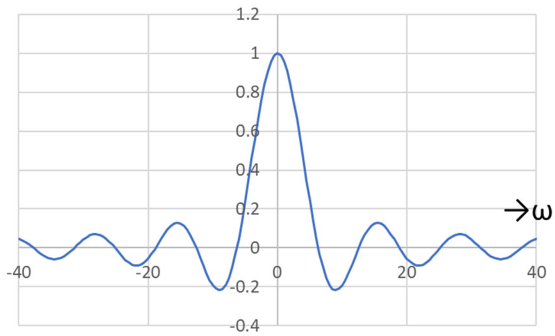


次のように計算できる。

$$F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{-j\omega} = \frac{2sin\frac{T}{2}\omega}{\omega}$$

この関数は sinc(ジンク)関数とも呼ばれる。T=1 としてプロットすると次のような形になる。



　ジンク関数はデジタル信号処理でよく使われ、

$$sinc\ x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

とされている。

(3) 正弦波関数

　ある角周波数ω_0の正弦波を考える。

$$f(\mathrm{t}) = sin\omega_0 t$$

正弦波はオイラーの式をつかって指数関数に変換する。

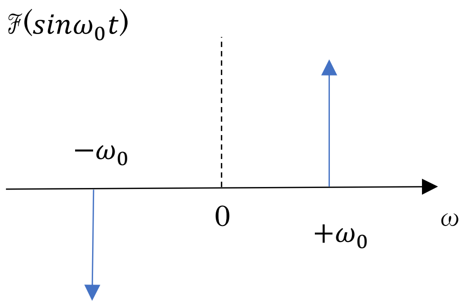
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} sin\omega_0 t e^{-j\omega t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right) e^{-j\omega t} dt$$
$$= \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt$$
$$+ \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt$$

となる。この計算をすすめると、

$$= \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$$

となる。サイン波をフーリエ変換すると、角周波数軸上で、$+\omega_0$と$-\omega_0$の位置に、面積 π/j のデルタ関数が出ることかわかる。

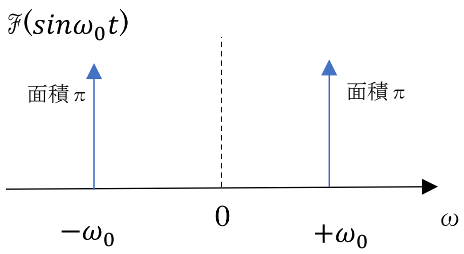
　角周波数がマイナスになる世界は置いておいて、正弦波の角周波数成分はω_0のみであり、フーリエ変換すると、それは単なる位置のずれた δ 関数となる。



余弦波、$f(\mathrm{t}) = cos\omega_0 t$の場合は次のようになる。

$$F(j\omega)$$
$$= \pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

となる。

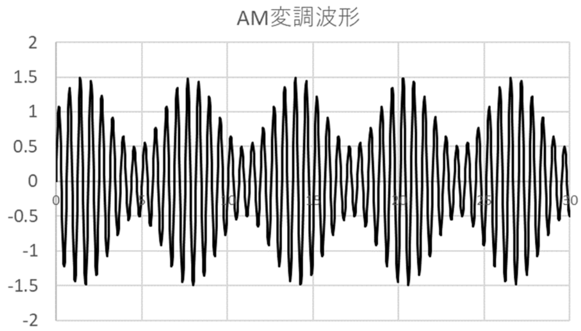


(4) AM（振幅変調）波形

　ラジオ放送に使われる波形について題材としてとりあげたい。AM 変調は搬送波と呼ばれる一定の高い周波数の正弦波の振幅をそれより低い周波数の音声信号で変調させる方式である。搬送波の角周波数をω₀、音声信号の角周波数をω₁とする。変調率をλとすると、時間関数として次のようになる。

$$f(\mathrm{t}) = (1 + \lambda sin\omega_1 t)sin\omega_0 t$$

参考として、ω_0とω_1をそれぞれ 10 と 1 として、変調率λを 0.5 とした波形をグラフにするとつぎのようになる。



　先ほどの正弦波の例題の結果を使いながら計算をしていく。元関数は次のように書き換える。

$$f(\mathrm{t}) = sin\omega_0 t + \lambda sin\omega_1 t sin\omega_0 t$$

ここからは三角関数の積和公式でもよいが、せっかく覚えたフーリエ変換の性質を使っていく。

$$sin\omega_1 t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

であることから、

$$f(\mathrm{t}) = sin\omega_0 t + \frac{\lambda}{2j}e^{j\omega_1 t}sin\omega_0 t$$
$$- \frac{\lambda}{2j}e^{-j\omega_1 t}sin\omega_0 t$$

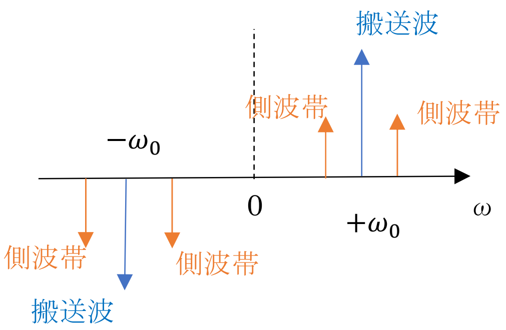
これをフーリエ変換するとつぎのようになる。

$$F(j\omega) == \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$$

$$-\frac{\lambda\pi}{2}\,\delta(\omega-\omega_0+\omega_1)+\frac{\lambda\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0+\omega_1)+$$

$$\frac{\lambda\pi}{2}\,\delta(\omega+\omega_0-\omega_1)-\frac{\lambda\pi}{2}\,\delta(\omega+\omega_0-\omega_1)$$

これをグラフにすると次のようになる。グラフにおいて、青の部分が搬送波の成分であり、そこから音声信号の ω_1 だけプラスマイナスにずれた位置に成分が出る。この成分を側波帯という。



AM 変調した信号では、搬送波の周波数に対して、変調された音声信号の周波数のプラスマイナスした領域を周波数帯として使っていることが分かる。

4．エネルギースペクトル

時間関数 $f(t)$ を信号波とするとき、$f(t)$ の 2 乗の積分

$$\int\left(f(t)\right)^2\ dt$$

はエネルギーを意味する。これをフーリエ変換すると、

$$|F(\omega)|^2 = F(\omega)\bar{F}(\omega)$$

で表される。つまり、フーリエ変換の 2 乗は、その周波数成分の信号のエネルギー密度を表す。つまり、信号波のフーリエ変換の絶対値の 2 乗をとると周波数を変数としたエネルギー密度を知ることができる。

5．高速フーリエ変換

信号波をフーリエ変換すると、時間軸から周波数軸に変換される。したがって、フーリエ変換後のプロットを知ることで、どんな周波数成分が含まれているのかを知ることができ、場合によってはノイズとなるような信号があるとしたら、そのノイズ成分の占める周波数領域をゼロにして、逆変換することで、ノイズ除去をされた信号を得るなどの芸当ができる。つまり、信号処理の基本となる技術である。信号波を一定時間でサンプリングして数値化し、それを離散的なデータとして扱い、これをフーリエ変換する。これを Fast Fourier Transform（FFT）あるいは、Discrete Fourier Transform (DFT)という。実際の信号波を周波数軸のスペクトルとして表してくれる装置を**スペクトラムアナライザー**という。昔は非常に高額であったが、最近はデジタルオシロスコープの高性能化、低価格化が進み、手軽に使えるようになった。

信号波を N 個の並んだデータとして取得したとする。l 番目のデータを d(l)とすると、その離散的フーリエ変換は次のように求められる。

$$F(k)=\sum_{l=0}^{N-1} g(l)\cdot e^{-j2\pi lk/N}$$

で計算される。フーリエ変換された $F(k)$

の k は角周波数と同じ性質のものだが、全波形を取得するのにかかった時間（フーリエ変換対象の時間）を T とするならば、k から角周波数にするにはこれを $2\pi k/T$ とすればよい。この式をまともに計算してもよいが、データ点数が多くなると計算が多くなるため、できるだけ高速でできるアルゴリズムが考えられている。その原理は他文献にゆずりたいが、WIKIPEDEA などの電子百科事典においても、そのプログラムが載せられている。（https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%AB%98%E9%80%9F%E3%83%95%E3%83%BC%E3%83%AA%E3%82%A8%E5%A4%89%E6%8F%9B）

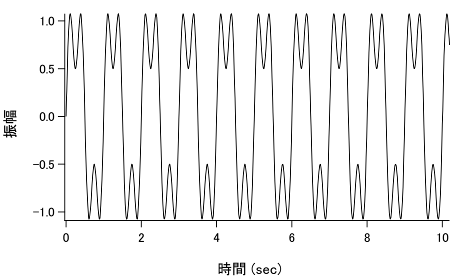
筆者が学生のころ、16 ビットのパソコンの黎明期で、1024 点のフーリエ変換をするのでも、数十秒の時間を要したが、時代は大きく進歩した。今や 64bitCPU であり、マルチコアが当たり前である。昔の苦労はどこへ行き、一瞬で答えを出してくれる。

例として、信号波形として、

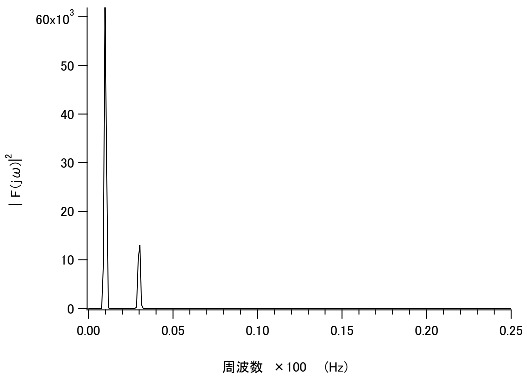
$$f(t) = sin(2\pi t) + 0.5sin(6\pi t)$$

すなわち 1Hz と 3Hz の正弦波のフーリエ変換を求めてみた。フーリエ変換は解析ソフト Igor6.36 を用いた。

元信号が次のグラフとなる。



そのフーリエ変換後の $|F(\omega)|^2$ のエネルギースペクトルが、このようになる。



信号波形は 1Hz と 3Hz の成分から成り立っていることが分かる。このグラフはエネルギー密度スペクトルであり、エネルギー密度は振幅の 2 乗に比例するため、信号波形は 1Hz と 3Hz の成分は 4：1 になるはずだが、計算されたフーリエ変換後のピークはそれとは若干ずれがあるように思える。これは実際に DFT 計算を行う上で、元関数の始点と終点をゼロにするため、窓関数をかけて処理を行うが、その処理の影響でずれが生じる。非常に長くサンプリングを行い、データ点数を増やしていくことで、そのずれは小さくなる。

6．ホワイトノイズ

抵抗器や半導体素子に電流を流すと、実際にナノの世界では電子が無数の散乱を繰り返して、移動する過程で**熱雑音**と呼ばれるノイズが発生する。この過程は完全にランダムな世界であり、これをフーリエ変換すると角周波数軸方向で常に一定である信号となる。このようなノイズをホワイトノイズ（白色雑音）とよばれる。回路設計は雑音との闘い、すなわち高

い S/N 比の追求の側面があるが、回路開発の段階ではホワイトノイズと主信号の周波数帯の違いを意識して、適切フィルターや演算処理をおこなう。数学ではあるが、フーリエ変換の知識は回路開発において必須の知識である。

閑話休題

筆者は若いころから短波ラジオが好きであり、今はインターネットの普及で、放送局は少なくなってしまったが、それでも休息のおりには海外の英語放送を楽しんでいる。ヤフオクを活用して手に入れたのだが、昔の通信機型受信機である、TRIO の 9R-59d は愛機である。これはシングルスーパーの高１中２と呼ばれる、真空管機であり、メインテナンスをするのが大変であったが、それが趣味でもある。

最近数３cm 程度の基板で販売されている DSP ラジオというものがある。興味のある方は「DSP ラジオ」でネット検索をしてみるとよい。値段として２千円程度と見た目は猪口才なのだが、大した性能らしい。これはラジオの電波を直接信号処理 LSI でもって A-D 変換で数値化し、FFT やフィルター演算などを行い、目的の放送の音声信号を演算を通して、復調するものである。これが、なかなか性能もよく、また FM 放送の受信においては極めて音質がよいとのことである。

レトロの受信機の趣味性や苦労は別軸であるが、こうして学んだ知識が IC の世界で具体化し、技術として使われているのを見ると、改めて興味深い。