第９章　パルス波のフーリエ変換による解析

これまで回路の信号を定常的である、例えば正弦波や直流として扱ってきた。実際の回路では非定常の信号を処理し、繰り返しのないパルス信号の場合もある。フーリエ級数の知識をもってすれば、周期波はその周波数の整数倍の余弦波、正弦波の和で表されるように、パルス波も様々な周波数成分を持つ余弦波、正弦波の集まりとしてあらわされる。パルス波がどのような周波数成分を含むのかを知るには数学的でのフーリエ変換を使う。様々な信号を扱う電気回路では、数学になるがフーリエ変換による周波数分析は重要であり、この章でそれを学ぶことにする。

１．フーリエ変換

時間関数$f(t)$を信号波とする。信号波が周期 T をもち、その角周波数$\omega = \frac{2\pi}{T}$とすると、信号波は次のように正弦波、余弦波の和で表されることを、フーリエ級数の概念として我々は既に学んでいる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (1)$$

この式において、a_n、b_nは、次のように表される。

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\, dt \quad n=1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt \quad n=1,2\cdots$$

フーリエ級数の表現は、正弦波、余弦波を用いる代わりに、複素数である$e^{j\omega t}$を用いて、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n e^{jn\omega t}\right) \quad (2)$$

と表すことができる。このときに、フーリエ係数c_nは次のように表すことができる。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{jn\omega t}dt$$

(2)式は、オイラーの式を使って(1)式を変換した形である。

上記は周期波の話であるが、信号波の時間関数$f(t)$がパルスであり、1 回しかない繰り返し、すなわち∞の周期をもつと考える。そこで、(2) 式を次のように書き換えたのが、フーリエ変換の式である。

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

この式において、$F(j\omega)$を時間関数$f(t)$の**フーリエ変換**であり、$F(j\omega)$から時間関数$f(t)$に戻すことを**フーリエ逆変換**という。時間関数$f(t)$のフーリエ変換は、ω の関数であることからわかる通り、角周波数における成分、つまり角周波数スペクトルを表す。

２．様々な関数のフーリエ変換

(1)　δ 関数（単位インパルス）

デルタ関数は実際にはありえない関数であるが、その周波数成分はゼロから∞までの様々な周波数の一定の振幅の波の合成で表される。

デルタ関数とは、

$$\delta(\mathrm{t}) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

でその積分は 1 である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{t}) dt = 1$$

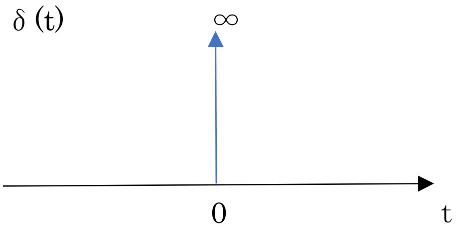
また$g(\mathrm{t})$を任意の関数とするときに、次の積分が成り立つことが知られている。

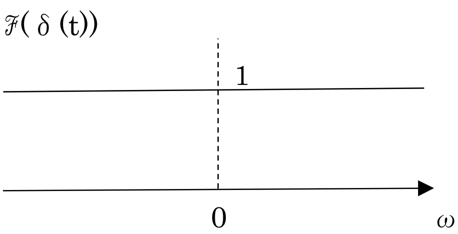
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{t}) g(t) dt = g(0)$$

このフーリエ変換は次のように求められる。

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{t}) e^{-j\omega t} dt$$
$$= e^{0} = 1$$

となる。デルタ関数はフーリエ変換すると 1 となり、周波数軸でみたら 0 から∞の範囲で一定の 1 をとる。時間軸 t と角周波数軸 ω で次のような関係がある。記号$\mathcal{F}$はフーリエ変換されたという意味である。

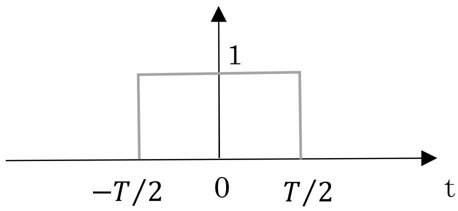




(2) ボックス関数

$$f(\mathrm{t}) = \begin{cases} 1 & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & t < -T/2, t > T/2 \end{cases}$$

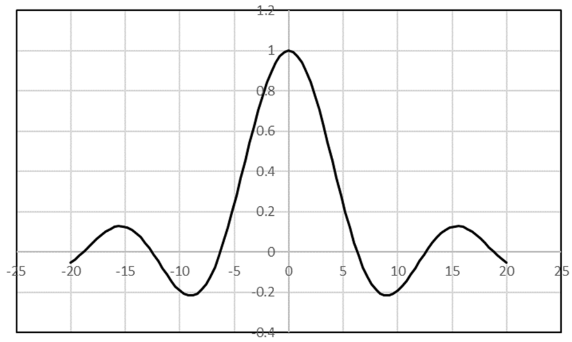
これは、幅 T 秒の間だけ 1 の振幅をもつ信号となる。



次のように計算できる。

$$F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}$$
$$= \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{-j\omega} = \frac{2sin\frac{T}{2}\omega}{\omega}$$

この関数は sinc(ジンク)関数という。ジンク関数はデジタル信号処理でよく使われる。仮に T=1 としてプロットしてみた。



(3) 正弦波関数

ある角周波数ω_0の正弦波を考えてみよう。

$$f(\mathrm{t}) = sin\omega_0 t$$

正弦波はオイラーの式をつかって指数関数に変換する。

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} sin\omega_0 t e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt$$

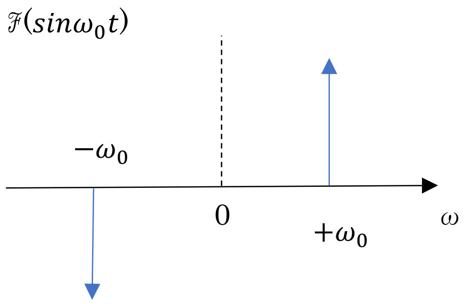
$$+ \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt$$

となる。この計算をすすめると、

$$= \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0)$$

となる。サイン波をフーリエ変換すると、角周波数軸上で、$+\omega_0$と$-\omega_0$の位置に、面積π/j のデルタ関数が出ることかわかる。

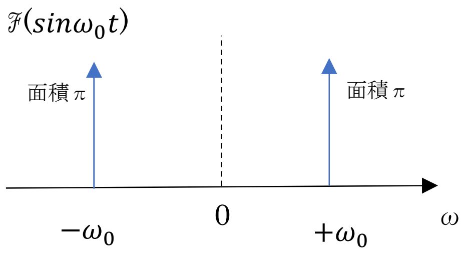
角周波数がマイナスになる世界は置いておいて、正弦波の角周波数成分はω_0のみであり、フーリエ変換すると、それは単なる位置のずれたδ関数となる。



余弦波、$f(\mathrm{t}) = cos\omega_0 t$の場合は次のようになる。

$$F(j\omega)$$
$$= \pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

となる。



3．エネルギースペクトル

時間関数$f(t)$を信号波とするとき、$f(t)$の 2 乗の積分

$$\int \left(f(t)\right)^2 \ dt$$

はエネルギーを意味する。これをフーリエ変換すると、

$$|F(j\omega)|^2 = F(j\omega)\bar{F}(j\omega)$$

で表される。つまり、フーリエ変換の 2 乗は、その周波数成分の信号のエネルギー密度を表す。つまり、信号波のフーリエ変換の絶対値の 2 乗をとると周波数を変数としたエネルギー密度を知ることができる。

4．高速フーリエ変換

信号波をフーリエ変換すると、時間軸から周波数軸に変換される。したがって、フーリエ変換後のプロットを知ることで、どんな周波数成分が含まれているのかを知ることができ、場合によってはノイズとなるような信号があるとしたら、そのノイズ成分の占める周波数領域をゼロにして、逆変換することで、ノイズ除去をされた信号を得るなどの芸当ができる。つまり、信号処理の基本となる技術である。信号波を一定時間でサンプリングして数値化し、それを離散的なデータとして扱い、これをフーリエ変換する。これを Fast Fourier Transform（FFT）あるいは、Discrete Fourier Transform (DFT)という。実際の信号波を周波数軸のスペクトルとして表してくれる装置を**スペクトラムアナライザー**という。昔は非常に高額であったが、最近はデジタルオシロスコープの高性能化、低価格化が進み、手軽に使えるよ

うになった。

信号波を N 個の並んだデータとして取得したとする。l 番目のデータを d(l)とすると、その離散的フーリエ変換は次のように求められる。

$$F(k) = \sum_{l=0}^{N-1} g(l) \cdot e^{-j2\pi lk/N}$$

で計算される。フーリエ変換された$F(k)$の k は角周波数と同じ性質のものだが、これを取得するのにかかった時間を T とするならば、k から角周波数にするにはこれを$2\pi k/T$とすればよい。この式をまともに計算してもよいが、データ点数が多くなると計算が多くなるため、できるだけ高速でできるアルゴリズムが考えられている。その原理は他文献にゆずりたいが、WIKIPEDEA などの電子百科事典においても、そのプログラムが載せられている。
（https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%AB%98%E9%80%9F%E3%83%95%E3%83%BC%E3%83%AA%E3%82%A8%E5%A4%89%E6%8F%9B）

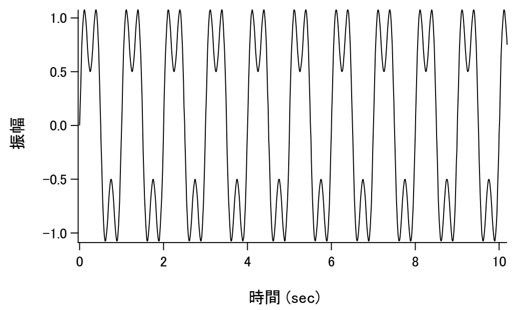
筆者が学生のころ、16 ビットのパソコンの黎明期で、1024 点のフーリエ変換をするのでも、数十秒の時間を要したが、時代は大きく進歩した。今や 64bitCPU であり、マルチコアが当たり前である。昔の苦労はどこへ行き、一瞬で答えを出してくれる。

例として、信号波形とし、

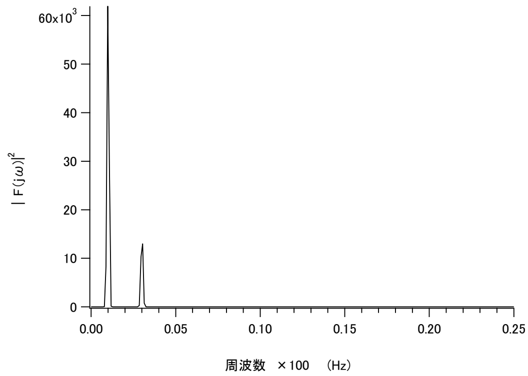
$$f(t) = sin(2\pi t) + 0.5sin(6\pi t)$$

の波形、すなわち 1Hz と 3Hz の正弦波のフーリエ変換を求めてみた。フーリエ変換は解析ソフト Igor6.36 を用いた。

元信号が次のグラフとなる。



そのフーリエ変換のエネルギースペクトルがこのようになる。



このように、信号波形は 1Hz と 3Hz の成分から成り立っていることが分かる。