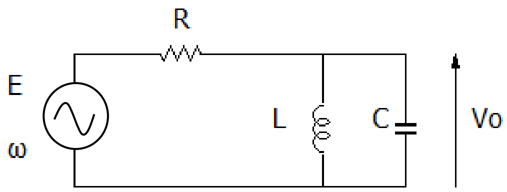
第 5 章　複素数を使った交流回路計算

　前章から、交流信号のフェーザー表示（複素数表示）を学んできた。複素数は、大きさと位相を同時に含むため、微分方程式にたよることなく、単純な代数学で交流回路の計算に活用できる。これを使いこなすには、練習も必要である。ここでは様々な交流回路の計算事例を通して、その取り扱いに慣れることを目的とする。また、消費電力、フィルター回路、利得計算、ボーデ線図、Y－Δ変換を使った計算についても取り扱う。

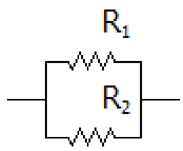
1．交流回路の電圧電流計算

　交流電圧や電流、R,L,C を複素インピーダンスで扱うことで、交流回路の各所の定常的な電圧、電流、それらの位相を計算することができる。1 章で学んだ抵抗での計算法をそのまま複素数でのインピーダンス計算でも使うことが可能である。

　次の例をみてもらいたい。角周波数 ω の電圧源がつながれており、L と C の並列部分の電圧を計算してみる。



　LC 並列のインピーダンスは抵抗の並列と同じ様に計算する。ここは 1 章で学んだ、二並列抵抗の式を活用する。



$$合成抵抗 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

この式を使って、次のようになる。

$$\frac{j\omega L\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

この並列インピーダンスは、R と直列であるので、Vo は**直列接続の電圧分割則**により、つぎのように求められる。

$$V_O = E\frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{R+\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}$$

$$= \frac{j\omega LE}{R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}$$

この式の意味であるが、求める電圧 Vo は、電源電圧の E の直列全インピーダンス $\left(R+\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)$ 分の、求める箇所のインピーダンス $\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$ となる。電圧 Vo は複素数ででてきたが、Vo の実効値は大きさ |Vo| であり、$\frac{j\omega LE}{R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}$ のノルムとなる。

$$|\mathrm{Vo}| = \frac{\omega LE}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 L^2}}$$

<u>読者の皆さんで、この時点で式の変形がわからない方がいらしたら、一度、踏みとどまり 4 章の複素数の計算方法復習をしていただきたい</u>。

Vo の位相角について求めてみる。複素数分数の位相角は(分子の位相角) — (分母の位相角)になることより、次の計算ができる。

$$\angle V_O = \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)$$

この式の$\frac{\pi}{2}$ は分子の位相角で、分子が$j\omega L$と虚数成分のみのため、この値となる。

この結果から Vo の瞬時値を求めるには、前章で述べた変換ルールに基づけばよい。交流電圧源の位相角を 0 としたとき、

$$V_O = \sqrt{2}|\mathrm{Vo}|\sin\left(\omega t + \angle V_O\right)$$

となる。もし交流電圧源の位相角が φ_0 であるなら、

$$V_O = \sqrt{2}|\mathrm{Vo}|\sin\left(\omega t + \angle V_O + \varphi_0\right)$$

となる。

2．消費電力の計算

2 端子間の消費電力、すなわち有効電力 P_E は次のように求めてきた。インピーダンスの位相角を ϕ としたときの有効電力は、

$$P_E = P_S\frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}} = P_S cos\varphi$$

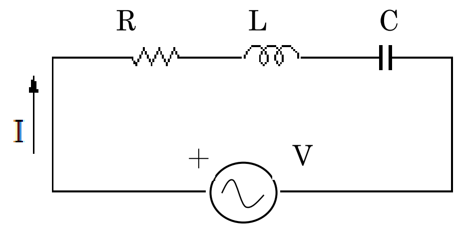
と表される。Ps は皮相電力といい、2 端子にかかる電圧の実効値と電流の実効値の積である。

複素数を使った電力計算においては、2 端子間にかかる電圧 V、電流 I がそれぞれ複素数で表されるなら、複素電力 P を計算すればよい。複素電力 P は、

$$P = \bar{V}I = P_E + jP_i$$

と表すことができる。$\bar{V}$は V の共役複素数である。共役複素数とは、虚数部の符号を変えた複素数のことである。複素電力の P の実数部P_Eが有効電力、虚数部P_iが無効電力となる。

次の例で練習してみよう。



ここで交流電圧は位相角ゼロで定数 V としよう。電流 I は

$$I = \frac{V}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{V}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$= \frac{VR - jV\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

となる。複素電力 P は

$$P = \bar{V}I = \frac{V^2R - jV^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

と求めることができる。

実効電力P_Eと無効電力P_iはそれぞれ次のように求められる。

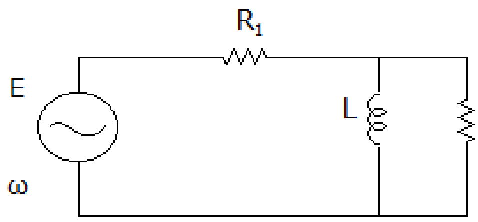
$$P_E = \frac{V^2R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$P_i = \frac{-V^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

複素電力の符号について触れる。複素電力を計算するときに電圧の共役を取る計算は、電圧を基準にした計算といわれ、無効電力P_iが負の場合は回路のインピーダンスがインダクタンス性であることを示し、正であるときは容量性を表している。負であることにエネルギー的意味はなく、無効電力はその電力が、回路と電源の間を行ったり来たりするだけで、エネルギー消費に寄与しない分である。

例題 1

次の回路に、R_2 で消費される複素電力を計算しなさい



解法

まずR_2とLの並列インピーダンスを求める。

$$\frac{j\omega L \cdot R_2}{R_2 + j\omega L} = \frac{\omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}{{R_2}^2 + \omega^2 L^2}$$

となる。R_2にかかる電圧Vは、

$$V = E\frac{\frac{\omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}{{R_2}^2 + \omega^2 L^2}}{R_1 + \frac{\omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}{{R_2}^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$= E\frac{\omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}{R_1({R_2}^2 + \omega^2 L^2) + \omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}$$

$$= E\frac{\omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}{R_1 {R_2}^2 + \omega^2 L^2 R_1 + \omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}$$

$$I = \frac{V}{R_2} = E\frac{\omega^2 L^2 + j\omega L R_2}{R_1 {R_2}^2 + \omega^2 L^2 R_1 + \omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}$$

V の複素共役を求めるが、分数の共役の

$\overline{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{\bar{f}}{\bar{g}}$ の関係式を使う。

$$P = \bar{V} I$$

$$= E\frac{\omega^2 L^2 R_2 - j\omega L {R_2}^2}{R_1 {R_2}^2 + \omega^2 L^2 R_1 + \omega^2 L^2 R_2 - j\omega L {R_2}^2} \cdot$$

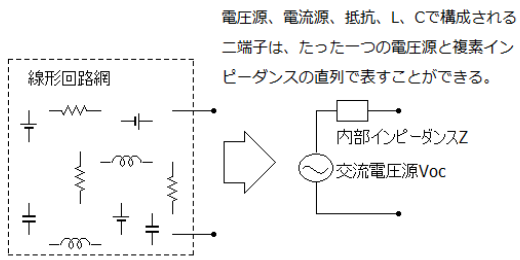
$$E\frac{\omega^2 L^2 + j\omega L R_2}{R_1 {R_2}^2 + \omega^2 L^2 R_1 + \omega^2 L^2 R_2 + j\omega L {R_2}^2}$$

$$= \frac{E^2 R_2(\omega^4 L^4 + \omega^2 L^2 {R_2}^2)}{(R_1 {R_2}^2 + \omega^2 L^2 R_1 + \omega^2 L^2 R_2)^2 + \omega^2 L^2 {R_2}^4}$$

と、虚数成分はなくなり、上記の値が有効電力となる。

3．テブナンの定理を用いた最大電力の供給条件の計算

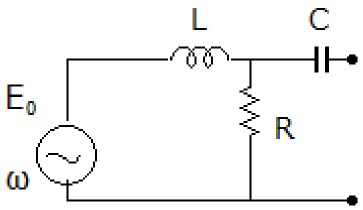
1 章の抵抗回路で習ったテブナンの定理は R、L、C を含む正弦波交流回路でも成り立つ。つまり、どのような複雑な回路であっても、たった一つの交流電圧源と複素インピーダンスの直列で表すことができる。



ここで開放電圧 Voc の求め方であるが、単純に二端子の開放電圧を計算すればよい。また内部インピーダンス Z を求めるには、中の電圧源、電流源をそれぞれ、短

絡、開放して二端子間のインピーダンス求めればよい。

例題 2　次の二端子回路をたった一つの電圧源と内部インピーダンス（直列インピーダンス）で表しなさい。



解法

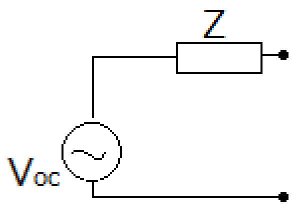
これもテブナンの定理を使って求める。開放電圧であるが、二端子解放時に C には電流が流れないので、R にかかる電圧がそのまま二端子の開放電圧になる。

$$V_{OC} = E_0 \frac{R}{R+j\omega L}$$

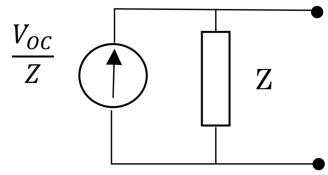
となる。内部インピーダンス Z は、電圧源を短絡させたときのインピーダンスを求めればよい。

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega RL}{R+j\omega L}$$

となる。

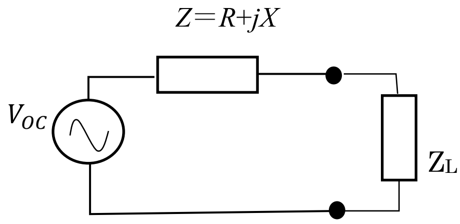


回路図としてはこのような形になる。なお Voc について、$E_0 \frac{R}{R+j\omega L}$は複素成分をもっており、Voc の位相角は問題中の電圧源の位相角とずれていることに注意してほしい。なおこの回路を電流源で表すと次のようになる。これも抵抗回路の章で述べた性質がそのままあてはめたものである。このように、電圧源と内部インピーダンスの回路は、電流源と並列インピーダンスで書き換えることが可能である。



○重要　電力供給最大の法則

電圧源、または電流源が含まれる R、L、C からなる回路は、一つの電圧源と内部インピーダンス Z で表すことができることを学んだ。これに任意の負荷 Z_L をつないだ時に、最大電力が取れる条件を考えてみる。



内部インピーダンス Z が $R + jX$ で表されるとき、Z_L が内部インピーダンスの共役複素数 $R-jX$ となるときに、負荷に最大の電力が供給される。

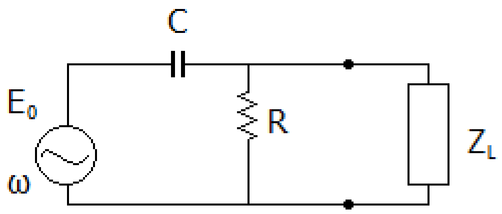
電力供給最大条件

$$Z_L = \bar{Z} = R - jX$$

このときに、内部インピーダンス中のリアクタンス成分 X が打ち消されて、回路

全体としては純抵抗となる。このとき、内部インピーダンスの抵抗成分と同じ抵抗成分を負荷がもつときに、電力は最大で伝達される。このような条件をインピーダンス整合といい、無線通信のアンテナや、高周波プラズマにおいては、この条件を満たすように、適度にリアクタンスと抵抗成分を調整する。

例題 3　次の二端子回路において、負荷として最大電力となる負荷のインピーダンスを求めよ



解法

これも負荷から左をみた内部インピーダンスを求める。この場合も電圧源をショートしてみると、R と C の並列になるため、

$$Z = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

$$= \frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2} - j\frac{\omega C R^2}{1+\omega^2 C^2 R^2}$$

となる。つまりこれの共役となる負荷であれば、供給電力は最大となる。この負荷は虚数成分が正であり、インダクタンス性の負荷ということになる。

$$Z_L = \frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2} + j\frac{\omega C R^2}{1+\omega^2 C^2 R^2}$$

4．利得とボーデ線図　～C-R フィルターを例に～

入力した信号に対して、出力される信号の比を複素数で表したものを**伝達関数**という。伝達関数を$G(j\omega)$、入力信号を Vin、出力信号を Vout とすると、

$$G(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

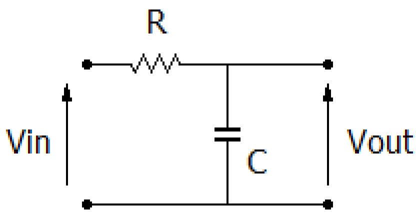
となる。この伝達関数のノルム$|G(j\omega)|$が**利得**となる。利得は入力に対して、出力の振幅の比である。

通常、利得 G は**デシベル表示**される。電圧、電流などの利得をあらわすときには、常用対数の 20 倍（$20log_{10}G$）とする。単位は dB（デシベル）である。デシベル表示は、この教科書の巻頭にも表にしてあるが、10 倍は 20ｄB、100 倍は 40ｄB と覚えておくとよい。

ここで C−R フィルターを使って、伝達関数を理解していきたい。**フィルター**とは、特定の周波数成分を除去したり、取り出したりする回路のことである。

① 低周波通過回路

低い周波数のみを通す回路のことでローパスフィルター（LPF）とも呼ばれる。



ローパスフィルター

この回路の伝達関数を計算してみる。

$$\mathrm{G}(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega CR}$$

となる。利得は

$$\mathrm{G}=|\mathrm{G}(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}$$

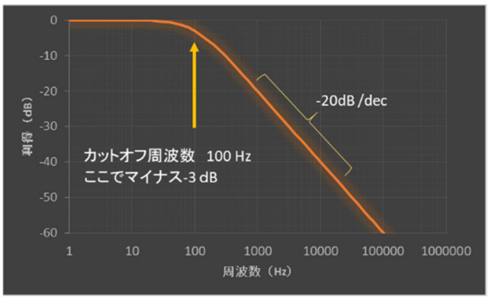
と計算することができる。この式を見てわかるように、周波数が非常に低い、すなわちωが 0 に近いときは、利得は 1、すなわち入力信号がそのまま出力されることがわかる。ここで、G の分母が$\sqrt{2}$となるときの角周波数ω_Cは$\frac{1}{CR}$となるが、これを**カットオフ角周波数**という。このときの周波数$\left(\mathrm{f}_C=\frac{1}{2\pi CR}\right)$を**カットオフ周波数**という。これは、周波数が除去されはじめる周波数と考えてよい。ここで CR の積は**時定数**(単位は秒)と呼ばれる。

伝達関数の位相角∠$\mathrm{G}(j\omega)$は、入力信号にたいして出力信号はどの程度位相角が変動するかを表す。この場合、

$$\angle\mathrm{G}(j\omega)=-tan^{-1}\omega CR$$

となる。

ここで、横軸を周波数の対数表示、縦軸を利得を dB で表した利得の周波数特性を示す。ここでは、2πCR=0.01 として、カットオフ周波数を 100Hz とした。



カットオフ周波数より低い周波数では、利得は 0 dB となるが、これは 1 倍ということである。カットオフ周波数から周波数が高くなると利得は下がり始め、周波数が 10 倍になるにつれて、－20 dB で減衰していく。このとき、横軸を周波数の対数、縦軸を dB 表示にしたときに、直線状で減衰する。その傾きは－20dB/dec と表記する。dec はディケードと呼び、周波数が 10 倍変化するという意味である。周波数 2 倍の変化をオクターブとよび、 2 倍で－6dB 減衰するので、この傾きを－6dB/oct と表記することもある。これは次の数式からもわかる。

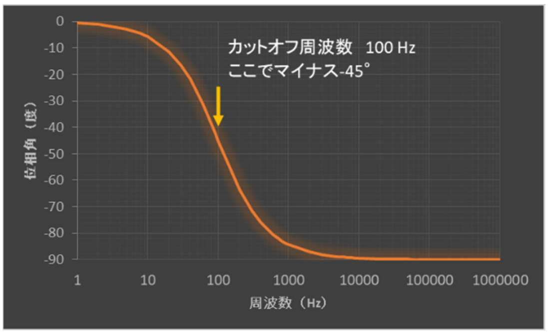
$$20log_{10}G=20log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}$$

$$\cong -20log_{10}\omega CR$$

$$=-20log_{10}\omega-20log_{10}CR \quad \omega\gg\frac{1}{CR}$$

ωが 10 になれば－20dB 下がり、2 倍になれば約－6 dB 下がることが分かる。

次に位相角の周波数特性をみてみよう。

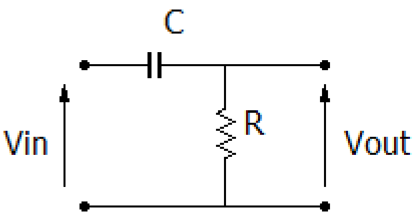


周波数が高くなるにつれ、位相は 0 から－９０° と遅れの度合いが増えていく。カットオフ周波数の 1/10 以下の周波数であれば、位相に遅れはほとんどなく、10 倍以上の周波数で－90° と遅れることがわかる。重要なこととして、カットオフ周波数さえわかれば、それ以上で利得は－20dB/dec で下がり、位相は前後 10 倍で大きく変動するイメージをもてばよい。

以上、伝達関数からノルムを取ると利得が計算でき、位相角をとると出力信号の位相が計算できる。利得と位相角の周波数特性の両図を、**ボーデ線図**という。ボーデ線図は電子回路の周波数特性を議論するのに重要な指標であり、フィードバックを有する制御回路では、回路の安定性や発振条件の判定にも使われる。

② 高周波通過回路

高い周波数のみを通す回路のことでハイパスフィルター(HPF) とも呼ばれる。



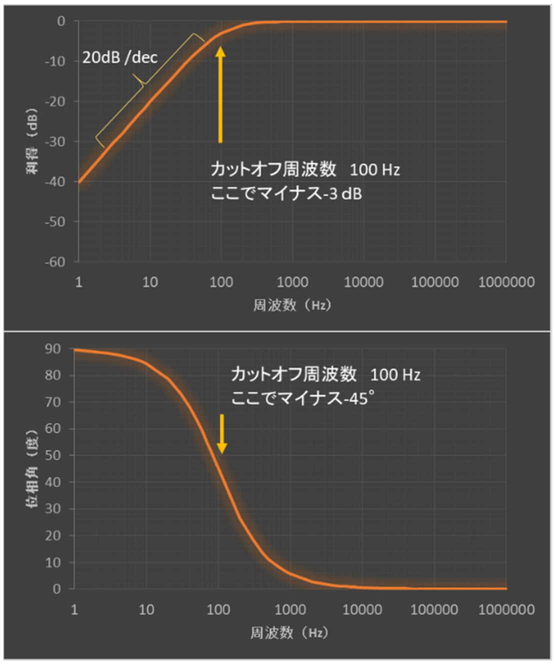
C-R 直列回路で R から信号取り出すと、高周波通過フィルターとなる。伝達関数、利得、位相角はそれぞれ次のようになる。

$$\mathrm{G}(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}$$

$$\mathrm{G}=|\mathrm{G}(j\omega)|=\frac{\omega CR}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}$$

$$\angle\mathrm{G}(j\omega)=\frac{\pi}{2}--tan^{-1}\omega CR$$

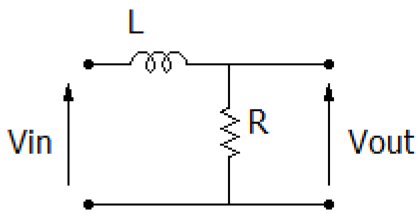
となる。ボーデ線図で表すと次にようになる。低周波通過回路と逆の傾向になるが、カットオフ周波数以下の利得の傾きは 20dB/dec となる。



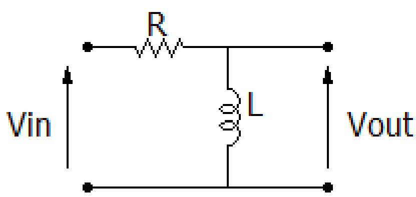
＜参考＞

以上は C-R 回路でのフィルター回路の例を示したが、L-R 回路でも同様の特性を得ることができる。

低周波通過回路



高周波通過回路

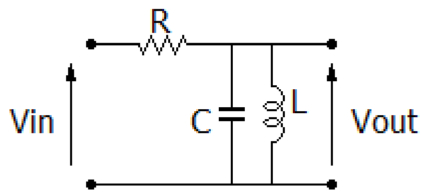


上のいずれも時定数は、L/R であり、カットオフ周波数f_cは、$f_c=\frac{R}{2\pi L}$である。

5.　共振回路

L-C 回路には並列と直列があるが、R と組み合わせることで、特定の周波数のみを取り出したり、また特定の周波数のみを除去したりすることが可能である。

① 並列共振回路



このように、C と L の並列共振回路で信号を取り出す。この時の伝達関数、利得、位相角はそれぞれ次のようになる。

$$\mathrm{G}(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{\dfrac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{R+\dfrac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}$$

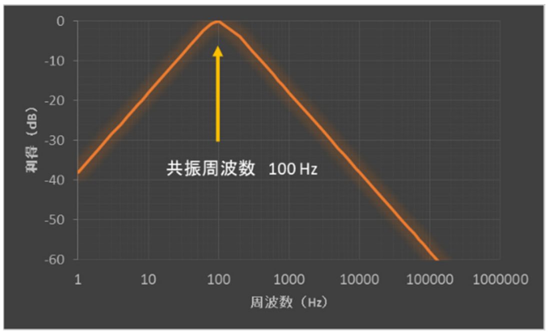
$$=\frac{j\omega L}{R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}$$

$$\mathrm{G}=|\mathrm{G}(j\omega)|=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 L^2}}$$

$$=\frac{L}{\sqrt{R^2\left(\frac{1}{\omega}-\omega LC\right)^2+L^2}}$$

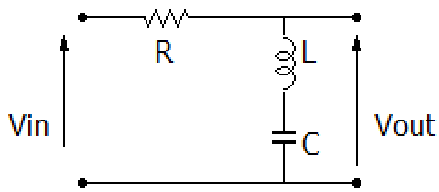
$$\angle\mathrm{G}(j\omega)=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}$$

となる。利得の式をみていただくとわかるように、共振時である $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ のとき、すなわち f が $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ のときに、$\left(\frac{1}{\omega}-\omega LC\right)^2$ はゼロとなり、G は最大値 1 となる。つまり、この周波数信号の入力があれば、それを通過させる回路として働く。G の利得についてみてみよう。この計算では、R、L、C をそれぞれ 500Ω、1H、2.53μF として共振周波数を 100Hz としてある。R を高くしていくと、スカートのような減衰特性をよりシャープにすることができる。



② 直列共振回路

L と C の直列部分から出力を取り出すと、共振周波数のみを通過させない回路としてはたらく。このときの共振周波数も $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ となる。



伝達関数、利得はつぎのようになる。

$$\mathrm{G}(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\mathrm{G}=|\mathrm{G}(j\omega)|=\frac{\left|\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right|}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

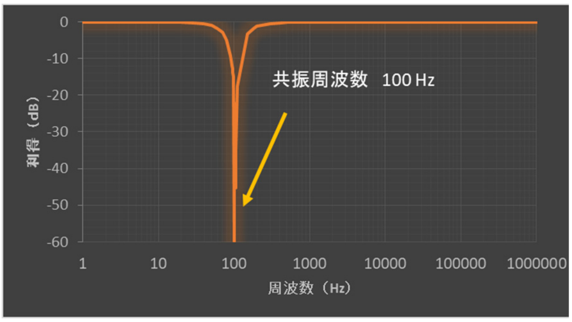
$$\angle G(j\omega) = \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

但し、$\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

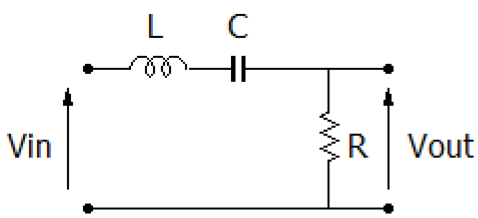
但し、$\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$

この回路では、共振時に$\omega L - \frac{1}{\omega C}$はゼロになり、利得 G は 0 になる。この利得の周波数特性をみてみよう。



この計算では、R、L、C をそれぞれ 500Ω、1H、2.53 μ F として共振周波数を 100Hz としてある。利得は、100Hz のときに 0 となり、dB 表示では－∞となる。

R-L-C 直列回路において下図のように抵抗を介して信号を取り出すようにすると、共振周波数の信号のみをとりだすフィルターとして機能する。



この回路の伝達関数、利得はつぎのようになる。

$$G(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

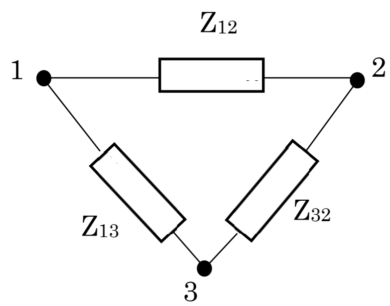
$$G = |G(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$のとき、すなわち$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$のときに、利得 G は最大の 1 となる。

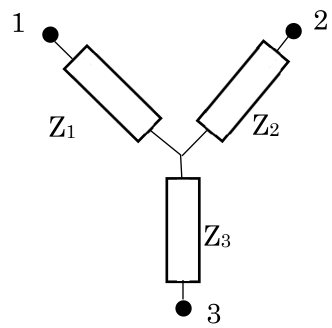
6.　Y－Δ変換を使った回路計算

ここでは、便利な計算として等価回路を使った計算法を示す。端子の数は同じであるが、回路は異なるが、端子からみた回路の機能が全く同じであるものを等価であるという。ここで Y－Δ変換という等価回路を示す。

Δ型回路（π型ともいう）



Y 型回路（T 型ともいう）



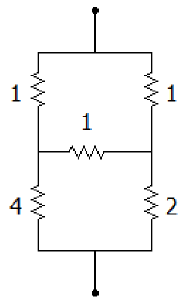
これらの関係は次の通りである。

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{32}} \qquad Z_{12} = \frac{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}{Z_3}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{32}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{32}} \qquad Z_{13} = \frac{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}{Z_2}$$

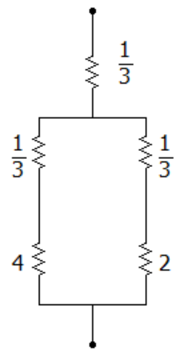
$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{32}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{32}} \qquad Z_{32} = \frac{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}{Z_1}$$

例題 3　次のブリッジ回路の両端の抵抗をもとめよ。



解法

　この場合、キルヒホッフで連立方程式を立てて解くが、Y－Δ変換をつかう。上の 1 Ωの 3 つがΔ回路になっているとみなす。すると次のように変換できる。



全抵抗は

$$0.33 + \frac{4.33\times2.33}{4.33+2.33} = 1.85\ \Omega$$

と求められる。

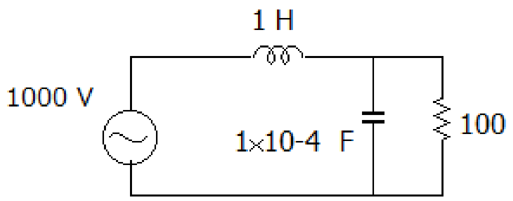
勉強のヒント

　この章では、複素数を使って交流電圧下での R、L、C 回路の計算方法の事例を述べた。複素数を使うことで、単純なオームの法則、すなわち V=ZI の式にすることができ、微分方程式を解かなくても交流回路の計算ができるようになった。この章では解説しなかったが、キルヒホッフの法則、多数電源が内蔵される回路、また並列回路での電流分割則など、1 章で解説した方法はすべて使えるとおもっていただきたい。

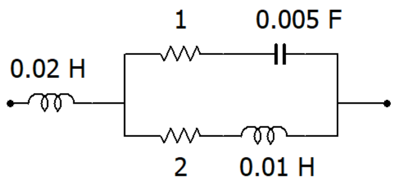
　一方、この方法での計算の限界も知らなければならない。この計算は、交流信号の定常状態の計算に限られるということである。急に変化するような信号、例えばステップ信号やインパルスなど、また不規則に変化する信号では、過渡現象の扱いとなり、この複素数を使った計算方法は使えなくなる。過渡現象の扱いは、後の章で解説する。

5 章　練習問題

1. 次の回路に流れる電流 I を複素数で表示し、回路の消費電力 P_E を求めなさい。角周波数 ω は 100 rad/s とする。



2. 二端子間の複素インピーダンス Z をもとめ、インピーダンスの大きさ|Z|、インピーダンスの位相角∠Z を求めよ。この二端子回路はインダクタンス性か、それともキャパシタンス性か。



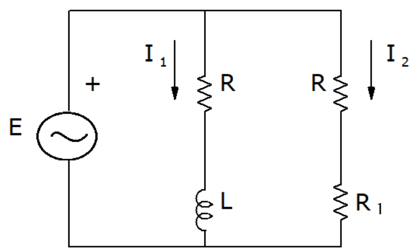
角周波数ωは100 rad/sとします。

3. 次の交流回路について次の問いに答えよ。電源の角周波数を ω とる。

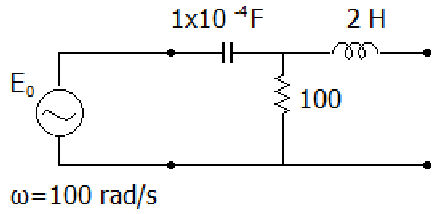
(1) $|I_1|$ と $|I_2|$ を求めよ。

(2) $|I_1|=|I_2|$ が成り立つとき、L と R_1 との関係を示せ。

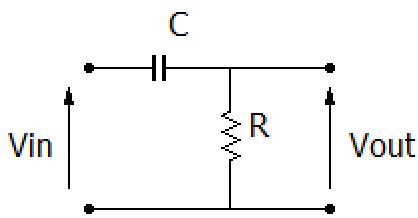
(3) (2)が成り立ち、しかも I_1 と I_2 の位相角差が π/4 であるときの条件を求めよ。



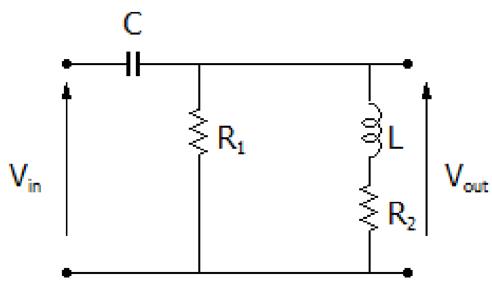
4. 次の二端子回路があるが、一つの電圧源と内部インピーダンス回路で表せ。これに負荷を付け場合、電力を最大で供給できる負荷の複素インピーダンスを求めよ。



5. 次の回路において、C が 0.001μF、R が 100Ω のときに、そのボーデ線図の外形を書きなさい。



6. 次の回路の伝達関数 G(jω)、利得|G(jω)|を計算しなさい。



5 章　練習問題略解

1.　1 H のインピーダンスは $j100$ 、1×10^{-4} F のインピーダンスは$-j100$ となる。全インピーダンス Z は

$$Z = j100 + \frac{100\cdot(-j100)}{100-j100} = j100 - \frac{j100}{1-j}$$

$$= j100 - \frac{j100(1+j)}{1+1} = j100 - j50+50$$

$$= 50 + j50$$

電流 I は

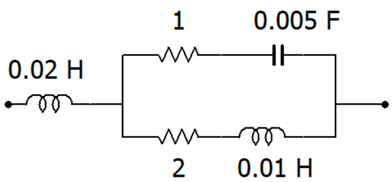
$$I = \frac{1000}{50+j50} = 20\frac{1}{1+j} = 20\frac{1-j}{1+1}$$
$$= 10 - j10$$

複素電力 P は

$$P = \overline{1000}\cdot I = 10000 - j10000$$

となる。有効電力はこの実数部であるので、10000 W(10 kW)となる。

2.　まずこの回路において、右半分の並列回路のインピーダンスをから求めていく。



角周波数ωは100 rad/sとします。

1Ω と 0.00F の直列インピーダンスは、

$$1 + \frac{1}{j100\cdot 0.005F} = 1 - j2$$

となり、2Ω と 0.01F の直列インピーダンスは、

$$2 + j100\cdot 0.01 = 1 + j$$

となる。これらの並列インピーダンスは、

$$\frac{(1-j2)(1+j)}{1-j2+1+j} = \frac{3-j}{2-j} = \frac{7+j}{5}$$

となる。全インピーダンスは、

$$j100\cdot 0.02 + \frac{7+j}{5} = \frac{7}{5} + \frac{12}{5}j$$　となる。

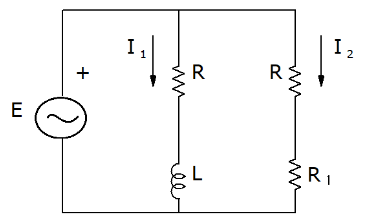
したがって、

$$|Z| = 2.78\ \Omega$$

$$\angle Z = tan^{-1}\frac{12}{7} = 59.7^{\circ} = 1.04\,rad$$

なお、この二端子回路は複素インピーダンスの虚部が正であり、位相角も正であるのでインダクタンス性である。

3.



(1)複素インピーダンスを使って計算していけばよい。

$$I_1 = \frac{E}{R + j\omega L}$$

$$I_2 = \frac{E}{R + R_1}$$

(2)電流の絶対値を計算する。

$$|I_1| = \frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$|I_2| = \frac{E}{R+R_1}$$

つまり、$\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = \frac{E}{R+R_1}$がなりたつ。

$$(R+R_1)^2 = R^2 + (\omega L)^2$$

$$2RR_1 + {R_1}^2 = (\omega L)^2$$

これを解くと、

$$R_1 = \frac{-2R+\sqrt{4R^2+4(\omega L)^2}}{2}$$
$$= -R + \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

(3) まず電流 I_2 は純抵抗を流れる電流なので、電源の位相角に対して、この電流の位相角はゼロである。電流 I_1 はインダクタンス性なので、電源に位相角にに対して遅れる。題意を満たすには、電流の位相角が$-\pi/4$ になればよい。ここで、

$$I_1 = \frac{E}{R + j\omega L}$$

は表され、分母のみが複素数となる。分母の位相角が$+\pi/4$ になればよい。つまり、分母の実数部と虚数部が等しいときである。すなわち、次が成り立つ。

$R = \omega L$

4.　2H のインピーダンスは $j200$ 、1×10^{-4} F のインピーダンスは$-j100$ となる。

開放電圧 Voc は、

$$V_{oc} = E_0 \frac{100}{100-j100} = \frac{E_0}{1-j} = \frac{E_0}{2}(1+j)$$

となる。

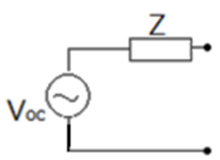
内部インピーダンス Z は、

$$Z = j200 + \frac{100\cdot(-j100)}{100-j100} = j200 - j50 + 50$$

$$= 50 + j150$$

となる。

等価回路はこの形になる。



消費電力を最大にする負荷インピーダンス Z_L は

$Z_L = 50 - j150$

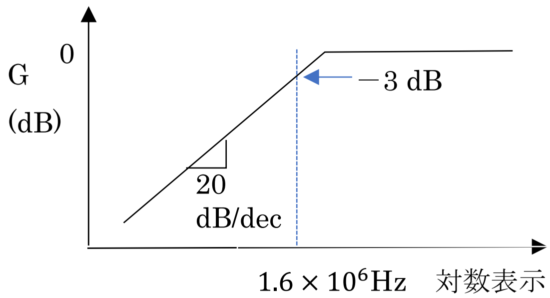
となる。

4.　精密には利得を計算して、エクセルでグラフにすればよいが、ここでは簡易な方法を示す。まずはこの形は、高周波通過フィルターである。カットオフ周波数を計算する。

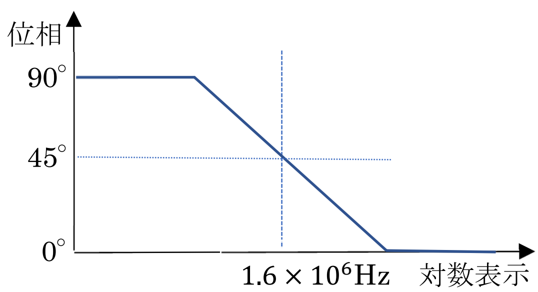
$$f = \frac{1}{2\pi\times0.001\times10^{-6}\times100} = 1.6\times10^6 \text{ Hz}$$

となる。

利得であるが、カットオフ周波数を中心にこのように書けばよい。



位相角はカットオフ周波数を中心に前後 1 桁で変化する図を書けばよい。



5.

$$\mathrm{G}(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

$$= \frac{-\omega^2 LCR_1 + j\omega CR_1R_2}{R_1 + R_2 + \omega^2 LCR_1 + j\omega(L + CR_1R_2)}$$

$$\mathrm{G} = |\mathrm{G}(j\omega)|$$

$$= \sqrt{\frac{(\omega^2 LCR_1)^2 + (\omega CR_1R_2)^2}{(R_1 + R_2 + \omega^2 LCR_1)^2 + \omega^2(L + CR_1R_2)^2}}$$