問題 68 テーラー展開を積分に使う

テイラー展開を使って次の積分を示しなさい。

$$\sin x + C = \int \cos x \, dx$$

これは単純にはsin xの導関数は次のように求めます。

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x\,(\cos h-1)}{h}+\cos x\,\frac{\sin h}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x\,(-\sin^2 h)}{h(1+\cos h)}+\cos x\,\frac{\sin h}{h}\right)$$

ここで

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

であることを利用すれば

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x\,(-\sin^2 h)}{h(1+\cos h)}+\cos x\,\frac{\sin h}{h}\right) = \cos x$$

となります。

しかしここは題意を汲んでテイラー展開を使って$\cos x$の積分が$\sin x$+C になることを確かめます。

テイラー展開は実数関数をある実数 a の周りで多高次関数で表すことができるというものです。ある関数$f(x)$を考えるときに、$x=a$の周りで次のように展開できます。

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

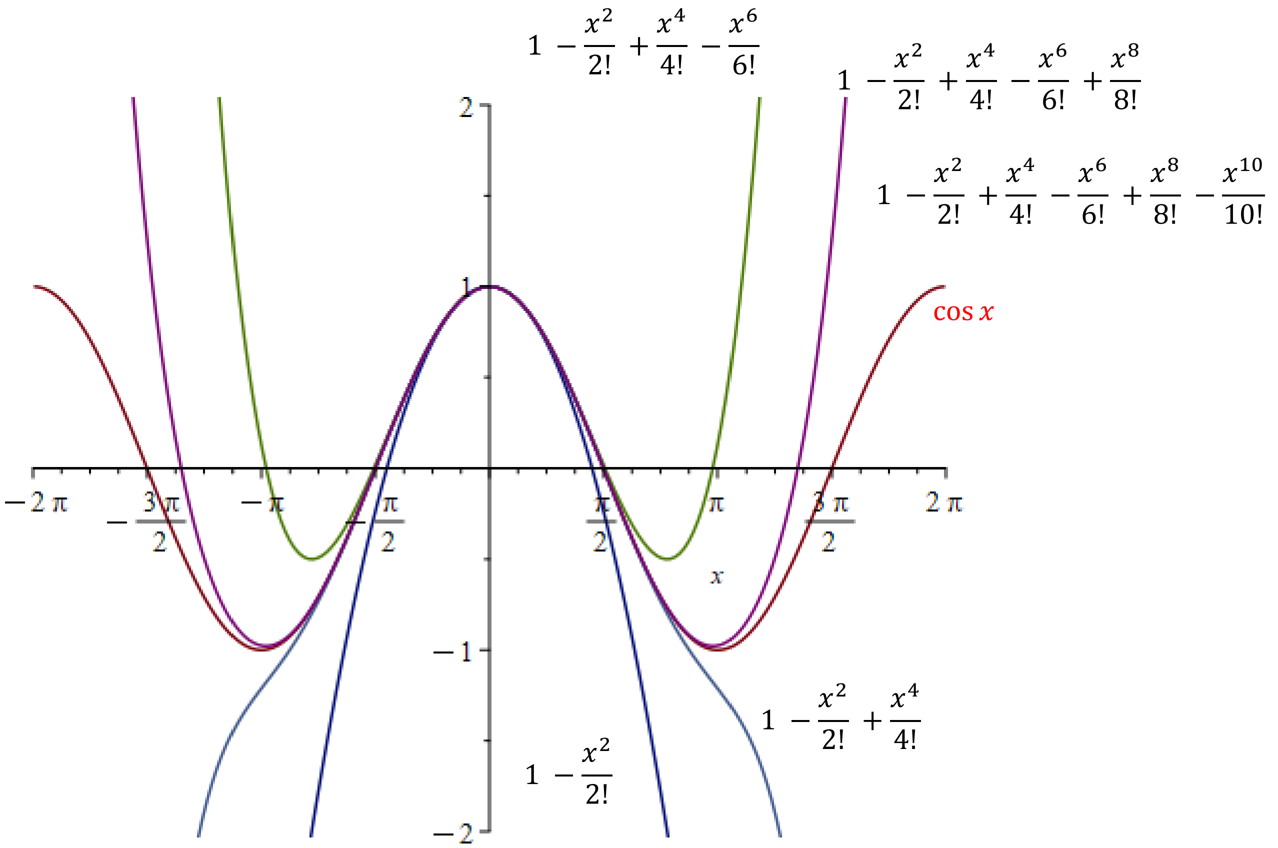
シンプルに考えれば、右項をｎ階に微分して、$x=a$を代入しても必ず等式が成り立つことが分かります。さて、題意に出てくる$\cos x$を$x=0$の周りでテーラー展開してみます。

$\cos' x = -\sin x \quad \cos'' x = -\cos x \quad \cos''' x = \sin x \quad \cos'''' x = \cos x$

より

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\cdots$$

と展開できます。この展開を無限に行えば左項との誤差が小さくなりますが、実際に使うまでは何番目かまでと決めて使うことになります。せっかくなのでどの程度一致するか実験してみましょう。



こんな感じです。展開項を多くとるほど$x=0$をから離れた位置での合致度があがってくることがわかります。これを見ていると、$-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}$のように限られた範囲では、$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$を近似で使うのはありかもしれません。現在コンピューターの性能が非常によくなって、数学関数を自由にプログラミングに組み込んで計算することは容易ですが、非常にタイニーな目盛空間の環境、例えば PIC などのマイコンで、高速で三角関数を計算するのであれば、テイラー展開に基づく多高次近似関数を使うことは大変有効です。

本題に戻りましょう。同じように$\sin x$も$x=0$周りでテイラー展開してみましょう。このようになります。

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$$

さて

$$\int \cos x\,dx = x-\frac{x^3}{3\cdot 2!}+\frac{x^5}{5\cdot 4!}-\frac{x^7}{7\cdot 6!}+\frac{x^9}{9\cdot 8!}-\frac{x^{11}}{10\cdot 10!}+\cdots+C$$
$$=\sin x + C$$

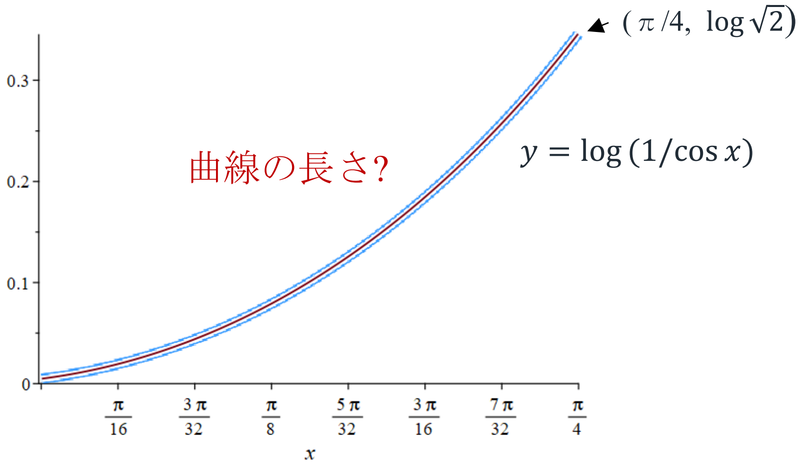
となり、等式が示されました。これは厳密な証明ではありませんが、テイラー展開を使うと積分困難な関数も積分できることがわかります。これはいろいろ面白そうなことに使えそうです。

問題 69 曲線の長さを積分

つぎの曲線について$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$の範囲で長さを求めよ

$$y = \log_e\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

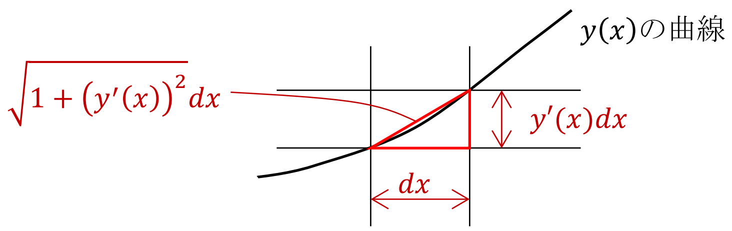
関数の曲線の長さを求める積分を練習しましょう。まずこの関数のグラフを書いてみます。



この関数は積分範囲でこのような曲線ですが、曲線の長さは次の式で求めます。

曲線の長さの積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$

この平方根は次の図で示すように次の微小区間の三角形の斜辺の長さになります。



したがって、関数の一階微分の 2 乗に 1 を足して、その平方根を取り区間積分をとります。
与関数の微分を求めます。

$$y' = -\frac{1}{\cos x} \times (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

求める答えは

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log|1 + \sin x| - \log|1 - \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left[\log \frac{|1 + \sin x|}{|1 - \sin x|} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} \right) = \log\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right) = \log(1 + \sqrt{2}) \cong 0.88137$$

参考までに二重根号の外し方はこうです。

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$

確認

　始点と終点の距離を求めてみましょう。

始点　(0, 0)　終点(π /4, $\log\sqrt{2}$)になりますので

距離= $\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\log\sqrt{2}\right)^2} \cong 0.85848$

となり、上記の計算がほぼ正しいことが分かります。

問題 69 逆関数を使って積分する。

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,dx$$

ここで教える技は定積分に限りますが、覚えておいて損はないとおもいます。

まずはオーソドックスなやり方として$t=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$とおいて置換積分をします。

これをとくと$x=\frac{2-t^2}{t^2-1}$

両辺を微分すると

$$\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+2}}-\frac{\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{t}-t)}{x+1}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{t}-t)}{\frac{2-t^2}{t^2-1}+1}=-\frac{1}{2}(t^2-2t+\frac{1}{t})$$

変数の変化範囲

$x \quad 0 \rightarrow \quad 1$

$t \quad \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}}$

$$与式=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} t\times\frac{1}{-\frac{1}{2}(t^2-2t+\frac{1}{t})}dt=-2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\frac{t^2}{t^3-2t^2+1}dt$$

この後、部分分数分解して解いていきますが、分母を因数分解しても無理数がでてきて、大変面倒なのでここでやめます。ちなみに積分値は

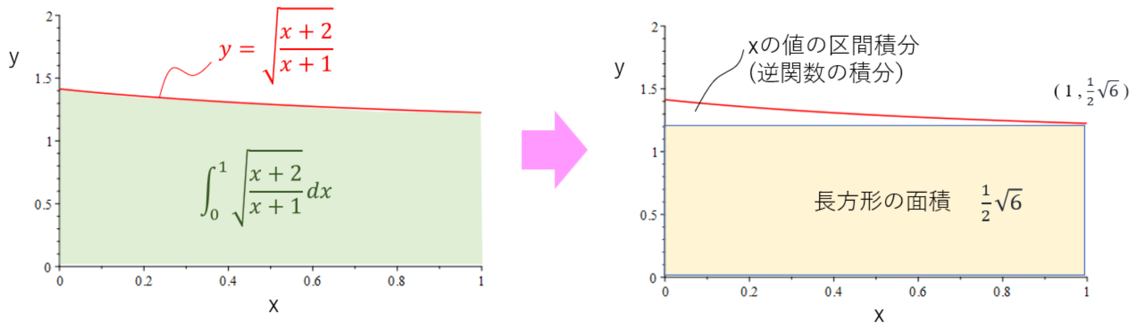
$$\sqrt{6}-\sqrt{2}\ -\log\left(1+\sqrt{2}\right)\ +\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

となります。

まずは

$$y=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$$

とおいて関数の概形を書いてみます。



与式は左の図の緑色の面積を求めていましたが、右のように長方形と逆関数の定積分の和と考えます。

$x = \frac{2-y^2}{y^2-1}$となり、yは$\frac{1}{2}\sqrt{6} \to \sqrt{2}$と変化するので

$$\int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} x\,dy = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{2-y^2}{y^2-1}\,dy = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{y^2-1} - 1\right) dy$$

$$= \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y-1} - 1\right) dy = \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} - \frac{1}{2}\log\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(3-2\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(5-2\sqrt{6}\right) - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$= -\log\left(\sqrt{2}+1\right) + \log\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

最後に長方形の面積を足すと

$$-\log\left(\sqrt{2}+1\right) + \log\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

問題 70　$\sqrt{x^2-a^2}$を含む積分問題

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$$

今回はこの問題を題材に様々な積分の技法を学んでいきましょう。

元関数の$\sqrt{}$の中身を平方完成します。

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

さあ、どう組しましょうか。なんとしても$\sqrt{}$をはずしたいので、

$$x+2=\sin\theta$$

とすると、

$$\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta-1}} = \frac{1}{\sqrt{-\cos^2\theta}} = \cdots$$

と行き詰まってしまいます。そもそも上記の置換をした場合、積分範囲を$\sin\theta$では表すことはできません。

この場合、二通りの置換積分が使えます。

1. $t-x=\sqrt{(x+2)^2-1}$ と置く方法
   これは Euler 置換とも呼ばれています。この置換を両辺 x で微分すると、

$$\frac{dt}{dx}-1 = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(x+2)^2-1}}\times 2(x+2) = \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2-1}} + \frac{\sqrt{(x+2)^2-1}}{\sqrt{(x+2)^2-1}} = \frac{t+2}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

$$dx = \frac{\sqrt{(x+2)^2-1}}{t+2}dt$$

変数の変化範囲も調べましょう。

x	0	$\to$	2
t	$\sqrt{3}$	$\to$	$2+\sqrt{15}$

したがって、

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}}dx = \int_{\sqrt{3}}^{2+\sqrt{15}} \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{(x+2)^2-1}}{t+2}dt$$
$$= \int_{\sqrt{3}}^{2+\sqrt{15}} \frac{1}{t+2}dt = [\log|t+2|]_{\sqrt{3}}^{2+\sqrt{15}} = \log\frac{4+\sqrt{15}}{2+\sqrt{3}}$$

と求められます。非常に都合よく問題を片づけることができます。

2. 双極関数 cosh で置換する方法

   三角関数の代わりに、双極関数を使う方法があります。

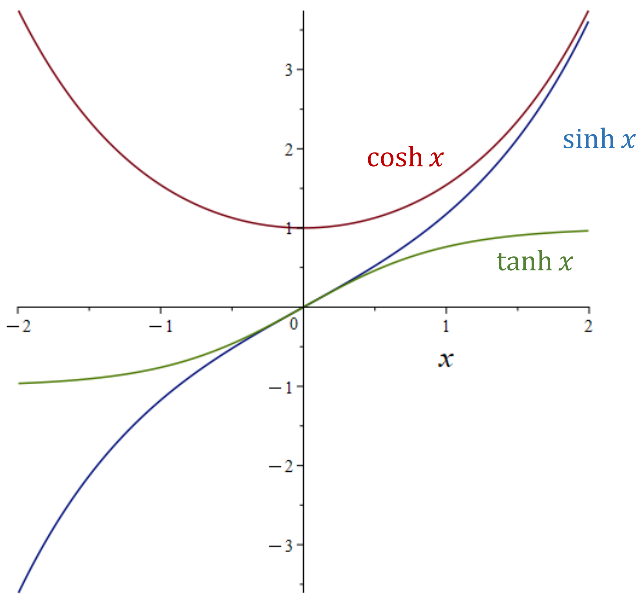
双極関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

それぞれの関数をグラフに表すと次のようになります。



cosh x は与題の積分範囲を表すことができます。

双極関数は次の微積分の関係があります。

$$\sinh' x = \cosh x$$
$$\cosh' x = \sinh x$$
$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

が成り立ちます。さらに

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

がなりたちます。

ここで、$x + 2 = \cosh t$とおいてみます。
ここで逆関数をもとめておきます。

$$x + 2 = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$
$$e^{2t} - 2(x+2)e^t + 1 = 0$$

$$e^t = x + 2 + \sqrt{(x+2)^2 - 1}$$
$$t = \log(x + 2 + \sqrt{(x+2)^2 - 1})$$

変数の変化の範囲をつぎのようにします。

x	0	$\rightarrow$	2
t	$\log(2+\sqrt{3})$	$\rightarrow$	$\log(4+\sqrt{15})$
	$= \alpha$		$= \beta$　とします。

すると

$$\frac{dx}{dt} = \sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$$
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}} dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}} \sqrt{\cosh^2 t - 1}\, dt$$
$$= \int_\alpha^\beta 1\, dt = [t]_\alpha^\beta$$
$$= \log(4 + \sqrt{15}) - \log(2 + \sqrt{3}) = \log \frac{4 + \sqrt{15}}{2 + \sqrt{3}}$$

（おわり）

問題 71　$\sqrt{x^2 \pm a^2}$**の積分**

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+2}\ dx$$

今回もこの問題を題材に積分技法を学んでいきましょう。
この問題も被積分関数に平方根がありますので、それに対処するための置換積分を行っていきます。その前に平方根の中身が二次関数ですので、平方完成していきます。

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx$$

ここからいくつかの方法を紹介します。

（双極関数を使う方法）

$$x+1 = \sinh\ \theta$$

とします。両辺を微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \cosh\ \theta$$

$$dx = \cosh\ \theta\ d\theta$$

$$\sqrt{(x+1)^2+1} = \sqrt{(\sinh\theta)^2+1} = \cosh\theta$$

x	0	$\rightarrow$	1
θ	$\operatorname{arcsinh} 1$	$\rightarrow$	$\operatorname{arcsinh}\ 2$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+2}\,dx = \int_{\operatorname{arcsinh} 1}^{\operatorname{arcsinh} 2} \cosh^2\theta\ d\theta$$

双極関数の加法定理より

$$\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b$$

$$\cosh^2\theta = \frac{\cosh 2\theta + \cosh 0}{2} = \frac{\cosh 2\theta + 1}{2}$$

$$\int_0^{\operatorname{arcsinh} 2} \frac{\cosh 2\theta + 1}{2}\ d\theta = \left[\frac{1}{4}\sinh 2\theta + \frac{\theta}{2}\right]_{\operatorname{arcsinh} 1}^{\operatorname{arcsinh} 2} = \frac{1}{2}[\,\cosh\theta\sinh\theta + \theta]_{\operatorname{arcsinh} 1}^{\operatorname{arcsinh} 2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sinh^2\theta}\sinh\theta+\theta\right]_{\mathrm{arcsinh}\,1}^{\mathrm{arcsinh}\,2} = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}-2\sqrt{2}+\mathrm{arcsinh}\,2-\mathrm{arcsinh}\,1)$$

$$= \sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arcsinh}\,2-\frac{1}{2}\mathrm{arcsinh}\,1$$

arcsinh を求めます。

$$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = y$$

としたときに

$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$
$$e^x = y+\sqrt{y^2+1}$$
$$x = \log|y+\sqrt{y^2+1}|$$

よって

$$\sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arcsinh}\,2-\frac{1}{2}\mathrm{arcsinh}\,1 = \sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$$

（部分積分を使う方法）

$$\int_0^1\sqrt{(x+1)^2+1}\,dx = \left[(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{(x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$$

$$= \left[(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{(x+1)^2+1-1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$$

$$= \left[(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}\right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1\sqrt{(x+1)^2+1}\,dx}_{\text{与題に一致}} + \int_0^1\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$$

$$\int_0^1\sqrt{(x+1)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\left[(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}\right]_0^1 + \int_0^1\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx\right\}$$

分数関数の積分　$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \log\left|x\pm\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$　a は定数 より

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx = \left[\log\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1)}\right)\right]_0^1 = \log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$$

$$\int_0^1 \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{(x+1)^2+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\log\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1)}\right)\right]_0^1$$

$$= \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$$

(オイラー置換を使う方法)

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx$$

$x+1=y$とします。

$$\int_0^1 \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx = \int_1^2 \sqrt{y^2+1}\,dy$$

ここで

$$t - y = \sqrt{y^2+1} \tag{1}$$

とします。

$$\frac{dt}{dy} - 1 = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{y+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{t}{t-y}$$

(1) 式を解くと

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 + 1$$

$$y = \frac{t^2-1}{2t}$$

与題に戻ると

$$\int_1^2 \sqrt{y^2+1}\,dy = \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{(t-y)^2}{t}\,dt = \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \left(t - 2y + \frac{y^2}{t}\right) dt$$

$$= \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \left(t - 2\frac{t^2-1}{2t} + \frac{\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2}{t}\right) dt = \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \left(t - t + \frac{1}{t} + \frac{t^4-2t^2+1}{4t^3}\right) dt$$

$$= \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^3}\right) dt = \left[\frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{8t^2}\right]_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}}$$

第一項

$$\left[\frac{1}{8}t^2\right]_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} = \frac{1}{8}\left(\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

第二項

$$\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$$

第三項

$$\left[-\frac{1}{8t^2}\right]_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

以上より

$$\int_0^1 \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$$

(tan θ で置換する)

$$x + 1 = \tan\theta$$

とします。両辺を θ で微分します。

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

変数の変化範囲

x	0	→	1
θ	arctan(1)	→	arctan(2)

$$\int_0^1 \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx = \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \sqrt{\tan^2\theta+1}\,dx = \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$$

この積分は難問ですが、やりようはあります。

$$\int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\tan\theta\right]_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} - \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)' \tan\theta\,d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\tan\theta\right]_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} - \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,\tan\theta\,d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\tan\theta\right]_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} - \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta} d\theta$$

$$= \left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right]_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} - \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1-cos^2\theta}{\cos^3\theta} d\theta$$

$$= \left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right]_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \underbrace{- \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta}_{\text{与式}} + \int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos\theta} d\theta$$

$$\int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right]_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} + \frac{1}{2}\int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos\theta} d\theta$$

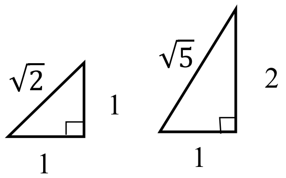
$$\int \frac{1}{\cos\theta} dx = \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} dx = \int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} dx = \int \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)} + \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)}\right) dx = \frac{1}{2}\log|1+\sin x| - \frac{1}{2}\log|1-\sin x|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$

$$\int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right]_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} + \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)}$$

tan(atan(1))=1　cos(atan(1))=$1/\sqrt{2}$　sin(atan(1))=$1/\sqrt{2}$
tan(atan(2))=2　cos(atan(1))=$1/\sqrt{5}$　sin(atan(1))=$2/\sqrt{5}$



の関係より

$$\int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) + \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} - \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}{5-4} = \left(\sqrt{5}+2\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$\int_{\mathrm{atan}(1)}^{\mathrm{atan}(2)} \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(\sqrt{5}+2\right)^2 - \frac{1}{4}\log\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$= \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$$

この積分ですが、次のように積分公式として示されています。

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$