電磁気学演習　2 章　　電位と電界の関係

ポイント

1. **電位と電界の関係**

電界とは、1C の電荷を置いたときに場から受ける力であり、それはベクトルである。電位は１C の電荷を基点からその場所へ動かすときの仕事であり、基点が定義されていないときは、無限遠点を考える。電界（ベクトル）と電位（スカラー）の関係は次のように表される。

1) 電界から電位を求めるとき

$$V = -\int_{基点}^{対象点} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$は電界ベクトルと積分経路の接線の単位ベクトルの積であり、電界 E と積分経路の接線が角度 θ をなす場合は、

$$V = -\int_{基点}^{対象点} E\cos\theta dl$$

とスカラーの積分にすることができる。

2)電位から電界ベクトルを計算するとき

$E = -gradV = -\nabla\mathrm{V}$　ただし $grad\mathrm{V} = \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$の偏微分で表される。

$grad$はグラディエントと呼ぶ。この式の$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}$は、V を x のみを変数として、他の変数は定数として微分するという意味である。

2. **電界があるときに、その場所の電荷密度を求める。**

ガウスの法則の微分系を使って求める。単位体積中の電荷（電荷密度）を ρ とすると、

$\rho = \varepsilon_0 div\boldsymbol{E}$　　　　　**（ガウスの法則の微分形）**

であり、ε_0は空間の誘電率である。$div\boldsymbol{E}$はダイバージェンス E と読み、

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

である。E_xは電界ベクトル$\boldsymbol{E}$の x 成分である。

例題１　**点電荷が作る電界の式から電位を求める問題**
原点に電荷 Q[C]を置いたときに、距離 r[m]の位置の電界ベクトルを答えなさい。このときの電位 V を求めなさい。場は真空を仮定し、誘電率はε_0とする。

点電荷の作る電界の式は、

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

である。電位 Vは

$$\mathrm{V}=-\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

ともとられる。$\hat{\boldsymbol{r}} \cdot d\boldsymbol{r}$であるが、$d\boldsymbol{r}$は経路積分の積分要素で、大きさは１、$\hat{\boldsymbol{r}}$とは同じ方向なので、内積をとると１になる。

例題２　**点電荷が作る電位の式から電界ベクトルを求める問題**
点電荷 Q がつくる距離rの位置の電位は

$$\mathrm{V} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ で表される。

位置ベクトル$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$とおいて、電界 $\boldsymbol{E}$を求めよ。

点電荷の作る電界の式が導かれる。

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

を計算すればよい。

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$ となる。

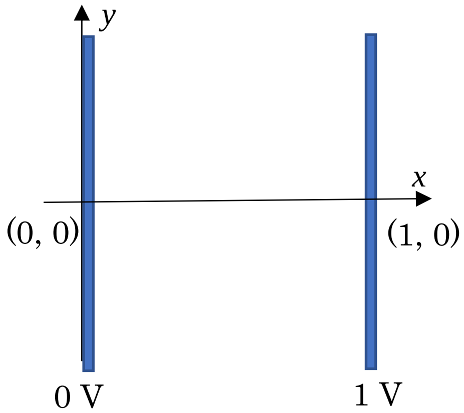
したがって、

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

と求められ、$\hat{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ より、

$$\boldsymbol{E} == \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$ と求められる。

例題 3　**線積分に慣れる**
次のように、距離が 1m離れた平行平板に図のように電位がかけられている。電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ は（-1, 0, 0）で与えられる。線積分を使って右の平板の電位が 1 V になることを確かめなさい。



計算のため図のような x-y 座標を考える。原点から座標(1, 0)までの線積分を計算する。

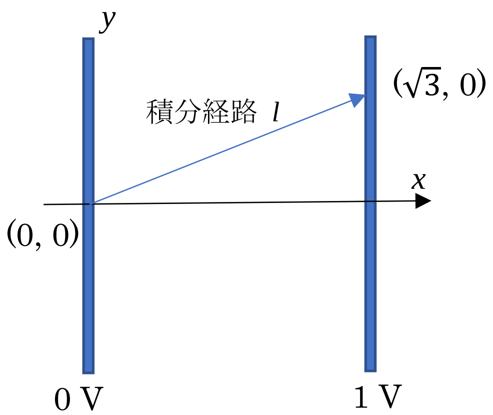
$$V=-\int_0^1 \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dx}$$

積分経路は、x 軸と平行なので、微小積分要素を $\boldsymbol{dx}$ とする。太字でベクトルである。・は内積を表す。内積はなす角度を θ とすると、スカラーと $\cos\theta$ の積になる。

$$V=-\int_0^1 E\cos\theta\, dx=-\int_0^1 E\cos(180°)dx=\int_0^1 dx=1$$ （答え）

この式において、電界ベクトルと積分方向が正反対なので、角度は 180° になることに注意する。

例題 4　例題 3 の問題で($\sqrt{3}$, 0)の位置の電位を計算し、同じ 1 V になることを示しなさい。

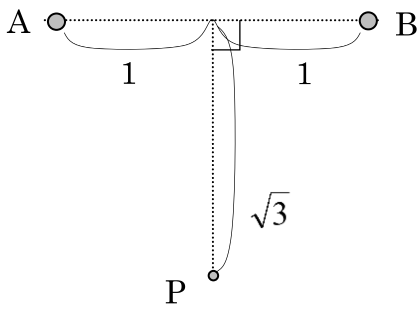


図のように積分経路 l を定める。
積分経路の距離は 2 で、電界ベクトルとなす角度は 120° なので、

$$V=-\int_0^2 \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dl}=-\int_0^2 |\boldsymbol{E}|cos\theta dl=$$
$$=-\int_0^2 \cos(120°)\, dl=\frac{1}{2}\int_0^2 dl=1$$ (答え)

※ミニ解説　このように二点間の電位差が等しいときに、どのような積分経路をとっても計算される電位差は同じになる。当たり前の結論だが、あえて練習のために出題した。

例題 5　図のように、点 A に Q[C]、点 B に 2Q[C]が 2[m]離れて置かれている。このとき点 P における電位 V を求めよ。



電位は、電荷の大きさと電荷とその場所との距離できまる。AP の距離は 2、BP の距離も 2 である。

P 点の電位は

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2}+\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2}=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0} \quad [\mathrm{V}]$$

となる。

例題 6　位置ベクトル$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$と表されるとき、その大きさ r および単位ベクトル$\hat{\boldsymbol{r}}$を求めよ。さらに、このベクトルの発散 div $\boldsymbol{r}$ 求めよ。

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

となる。div $\boldsymbol{r}$ は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}=\frac{\partial \mathrm{r}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{r}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{r}_z}{\partial z}$$

である。これは偏微分といい、$\frac{\partial r_x}{\partial x}$は x 以外の変数は定数とみなして、$\boldsymbol{r}$の x 成分を x で微分とするという意味である。

$\frac{\partial \mathrm{r}_x}{\partial x}=1$,$\frac{\partial \mathrm{r}_y}{\partial y}=1,\ \frac{\partial \mathrm{r}_z}{\partial z}=1$より、

div $\boldsymbol{r}$＝3

例題 7　図のような半径 a[m]の球の表面に均一に電荷が帯電しており、その量は Q[C]である。このとき、半径 r の位置での電界の強さは、

$$E = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > a \end{cases}$$

であらすことができる。ε_0は場（真空）の誘電率である。このときの電位をrの関数として求めよ。

無限遠点を基点に、経路積分を行えばよい。

$r > a$　では

$$V = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$0 < r < a$ では、

$$V = -\int_{a}^{0} 0\, dr - \int_{\infty}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

ここで、$r > a$と$0 < r < a$で電界の関数が変わるので、積分経路を二分割して求めることに注意する。

※ミニ解説　電位を電界から計算で求めるときに、必ず電位の基準、すなわち線積分の基点を与える必要がある。この基点は、アースであり、電位 0 V の地点である。電磁気学では、この電位の基点が与えられていないときは、暗黙で無限遠点を基点とする。