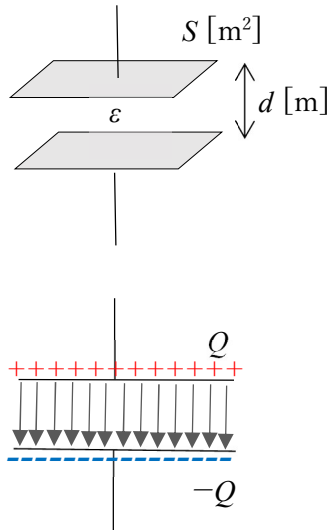


電磁気学基礎 4章 コンデンサ

ポイント

1. 平行平板コンデンサ



コンデンサの名前は蓄電器の condenser からきている。平板電極の面積を S 、電極間距離を d 、平板間の誘電率を ϵ とすると、平行平板コンデンサの容量 C は

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad \epsilon = \epsilon_s \epsilon_0$$

で表され、 ϵ_s は比誘電率、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

コンデンサ C はコンデンサにかけられる電圧を V 、蓄積される電荷 Q とすると、 $Q=CV$ の関係がある。コンデンサに電圧をかけると、左図のように電荷が蓄積され、上下の電荷はそれぞれ正負の符号は違うが同じ量である。電界のベクトルは電極間に局在する。

2. 平行平板コンデンサのエネルギー

電荷 Q [C] で、極板間の電圧 V [V]、コンデンサ容量を C [F] とすると、コンデンサに貯められるエネルギー U [J] は、

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

である。平行平板コンデンサに蓄積されるエネルギーは、平行平板間の電界のある部分に静電エネルギーとして蓄積される。単位体積当たりの静電エネルギーは

$$\frac{1}{2} \epsilon E^2$$

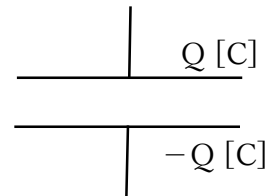
である。静電エネルギーを電極間の体積の前空間で積分すると、コンデンサの蓄積エネルギーの $\frac{1}{2} QV$ と一致する。

例題1 電極間距離 d [m]で、電極面積 S [m²]の平行平板コンデンサーの静電容量をもとめなさい。電極間の誘電率は ϵ_0 とする。

図のようにコンデンサーの両極に Q [C]、 $-Q$ [C]の電荷を与える。このとき、電極において単位面積当たりの電荷 σ は

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

となり、上部電極では σ 、下部電極では $-\sigma$ で帯電していることになる。

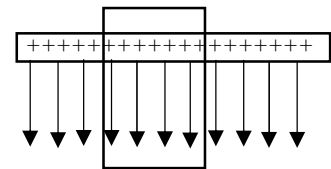


ガウスの法則より、単位面積当たり σ の電荷から、電界が下に出ている。つまり電界の大きさ E は

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

となる。

単位面積当たり σ がいて、下に電界がでている



平行平板間の電圧 V は、

$$V = E \times d = \frac{dQ}{\epsilon_0 S}$$

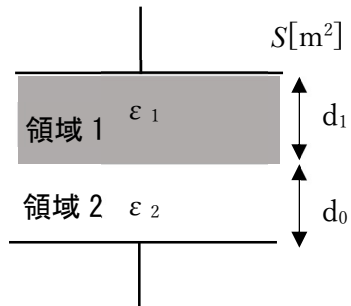
となる。

静電容量 C は $Q \div V$ であたえられるので、

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

となる。

例題2 次のような二重誘電体コンデンサの静電容量を求めなさい。



これも1の問題と同様、コンデンサの両極に $Q[\text{C}]$ 、 $-Q[\text{C}]$ の電荷を与える。電極での単位面積当たりの電荷 σ は $\sigma = \frac{Q}{S}$ となり、上部電極では σ 、下部電極では $-\sigma$ が帯電する。

領域1での電界強度 E_1 は、

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{Q}{\epsilon_1 S}$$

となる。領域2での電界強度は、

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2} = \frac{Q}{\epsilon_2 S}$$

となる。

極板間の電圧は、

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{Q d_2}{\epsilon_2 S} = Q \left(\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \right)$$

となる。

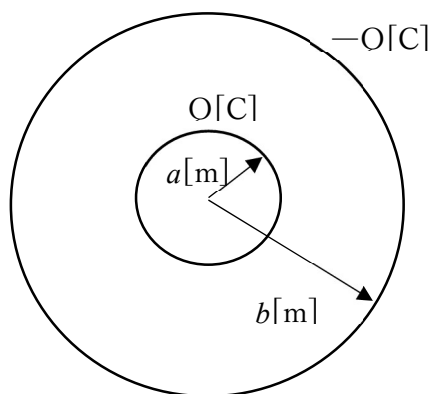
静電容量 C は、

$$C = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{S \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

となる。

例題3 二重球殻コンデンサの問題

- (1) 内球と外球にそれぞれ電荷 Q と $-Q$ をおいたときに、各部の電界強度を求めよ。空間の誘電率は ϵ_0 とする。
- (2) このときの静電エネルギーの分布を求めよ。
- (3) このときの電位の分布を求めよ。
- (4) 内球と外球の電位差を求めよ。ただし外球の電位を 0 とする。
- (5) 内球と外球を金属電極とみなしたときに、この両極間の静電容量を求めよ。



- (1) 内球と外球にそれぞれ電荷 Q と $-Q$ をおいたときに、各部の電界強度を求めよ。空間の誘電率は ϵ_0 とする。

これはガウスの法則を使えば簡単である。

$r < a$ のとき

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} = 4\pi r^2 E = 0 \quad \therefore E = 0$$

$a < r < b$ のとき

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$r > b$ のとき

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} = 4\pi r^2 E = \frac{Q-Q}{\epsilon_0} = 0 \quad \therefore E = 0$$

- (2) このときの静電エネルギーの分布を求めよ。

静電エネルギーの式は $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ で与えられる。

$$r < a \text{ のとき} \quad U = 0$$

$$a < r < b \text{ のとき} \quad U = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

$$r > b \text{ のとき} \quad U = 0$$

(3) このときの電位の分布を求めよ。

電位は電界の線積分の式で求める。

$$V = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \text{より}$$

$$r > b \text{ のとき } V = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ この間ゼロである。}$$

$$\begin{aligned} a < r < b \text{ のとき } V &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_b^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_b^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^r \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_b^r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

$$r < a \text{ のとき } V = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_a^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

(4) 内球と外球の電位差を求めよ。ただし外球の電位を 0 とする。

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \text{ となる。}$$

(5) 内球と外球を金属電極とみなしたときに、この両極間の静電容量を求めよ。

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi \epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{4\pi \epsilon_0 ab}{b-a}$$

となる。