

## 第 10 章 伝送線路

長い線路に信号を通すと、線路を伝わる信号は一定の速度で、伝搬し、減衰し、終端部分では反射や定在波が発生する。あたかも電気信号である電圧信号、電流信号は波動の伝送のような振る舞いをする。ここでは、伝送線路を伝送線路方程式に基づき、伝送線路の伝送定数、特性インピーダンス、反射比について理解を試みる。

### 1. 伝送線路と伝送線路方程式

電気信号を比較的長い距離を伝送する線路を考える。伝送線路には、図 1 に示す平行線路、同軸線路の 2 種類がある。

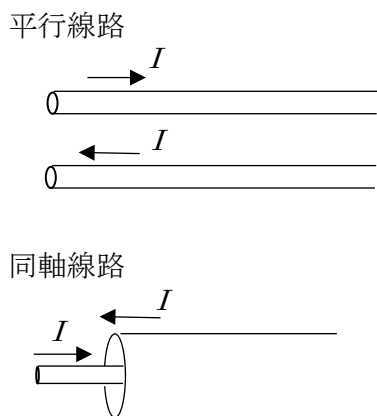
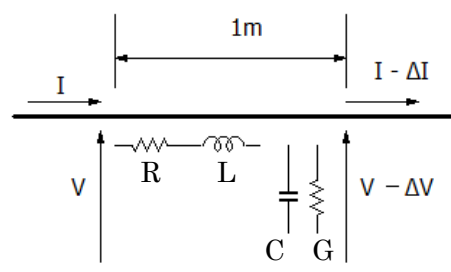


図 1 平行線路と同軸線路

低周波の電力線路ではコストの安い平行線路が使われ、高周波や微弱な信号伝送には同軸線路が使われる。同軸線路の場合、磁力線と電界が中心線と被覆線（外径線）との間に集中し、電磁波を外部に出さず、低損失な信号伝送が可能になる。

伝送線路は、電磁気学的な考えから、単位長さ当たり一定のインダクタンス  $L$  [H/m] と抵抗  $R$  [ $\Omega$ /m] が直列に乗っている。また往路と復路の電線間で、漏れ電流のもとになる単位長さ当たりのアドミッタンス（コンダクタンス）  $G$  [S/m] と、キャ

パシタンス  $C$  [F/m] が付帯している。これらが一様に分布していることから**分布定数回路**とも呼ばれる。



等価回路

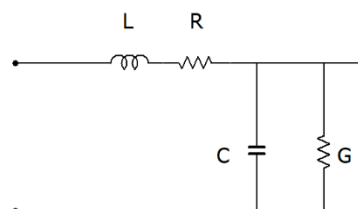


図 2 伝送線路には単位長さ当たり、 $R$  と  $L$  が直列に挿入されており、また  $C$  と  $G$  (アドミッタンス) が線路間につながっていると考える。 $G$  は抵抗と同じ記号を使っているが、 $G$  の数値は抵抗の値の逆数で表記する。

ここで左から交流信号を与え、右方向に信号が伝わりとする。交流信号の角周波数を  $\omega$  とし、単位長さ ( $\Delta x$ ) を  $1\text{m}$  とする。単位長さを進んだ時の電圧の低下分  $-\Delta V$  は次のように表される。

$$-\Delta V = (R + j\omega L) \Delta x \cdot I \quad (1)$$

同様に電流の低下分を  $-\Delta I$  とすると

$$-\Delta I = (G + j\omega C) \Delta x \cdot V \quad (2)$$

となる。これらを微分方程式にするとつぎのようになる。

$$-\frac{dV}{dx} = (R + j\omega L)I \quad (3)$$

$$-\frac{dI}{dx} = (G + j\omega C)V \quad (4)$$

(3)式および(4)式の両辺を  $x$  で微分すると、次の式が得られる。

$$\frac{d^2V}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V \quad (5)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)I \quad (6)$$

これは二階微分方程式で物理の世界では波動方程式と呼ばれるが、ここでは**伝送線路方程式**と呼ぶ。

ここで

$$\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (7)$$

とおくと、

(5)式の一般解は、次のように表される。

$$V = \underbrace{V_F e^{-(\alpha+j\beta)x}}_{\text{進行波}} + \underbrace{V_R e^{(\alpha+j\beta)x}}_{\text{反射波}} \quad (8)$$

$(\alpha + j\beta)$ の実数部  $\alpha$  は信号の**減衰定数**、虚数部の  $\beta$  は**位相定数**になる。 $V_F$ と $V_R$ はそれぞれ進行波と反射波の振幅になる。

電流  $I$  は(3)式より、

$$\begin{aligned} I &= \frac{\alpha+j\beta}{R+j\omega L} \{V_F e^{-(\alpha+j\beta)x} - V_R e^{(\alpha+j\beta)x}\} \\ &= \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} \{V_F e^{-(\alpha+j\beta)x} - V_R e^{(\alpha+j\beta)x}\} \\ &= \frac{1}{Z} \{V_F e^{-(\alpha+j\beta)x} - V_R e^{(\alpha+j\beta)x}\} \quad (9) \end{aligned}$$

と求められる。電流  $I$  に対する電圧  $V$  の比が**特性インピーダンス  $Z$**  となり、次のように表すことができる。

$$Z = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} \quad (10)$$

なお、無損失線路である  $R$  と  $G$  がともにゼロとなる場合

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11)$$

となる。

ここで進行波  $V_F e^{-(\alpha+j\beta)x}$  について、波の伝搬速度を求めてみよう。この進行波の項に時間成分がないが、時間項を考える場合は  $e^{j\omega t}$  をかければよい。

$$V_F e^{-(\alpha+j\beta)x} e^{j\omega t} = V_F e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \omega t)} \quad (12)$$

ここで、 $e^{j(-\beta x + \omega t)}$  は波の式の項である。 $-\beta x + \omega t = \text{一定}$  として、時間微分すると

$$(\text{伝搬速度}) \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (13)$$

となる。これを計算するのは大変であるが、 $R \ll \omega L, G \ll \omega C$  の関係がある、すなわち、伝送線路の線路抵抗が十分低く、漏れ電流が小さいときに、

$$v \cong \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14)$$

となる。 $L$ と $C$ は線路の形状にもよるが、ほぼ光速に近いと思っていただきたい。伝送線路を電気信号は光速に近い速さで伝搬するということである。また、線路を伝搬する波の波長  $\lambda$  は、

$$\lambda = \frac{2\pi}{v} \quad (15)$$

となる。

先ほどらい用いてきた  $\alpha$  および  $\beta$  について解説する。

$\alpha$  は減衰係数で、

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (\omega^2 LC - RG) \}} \quad (16)$$

$\beta$  は位相定数で、

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (\omega^2 LC - RG) \}} \quad (17)$$

となる。なお、無損失線路である  $R$  と  $G$  がともにゼロとなる場合

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

となる。

## 2. 同軸線路の特性インピーダンスと伝搬速度

ここで、エレクトロニクスの世界で広く使われる同軸線路の特性インピーダンスを求めてみよう。ここは簡単な電磁気の計算になる。同軸線路の長さは無限に続いている仮定で、単位長さ 1 m 分の現象を考える。内径と外径との間には、比誘電率  $\epsilon_s$  の誘電体が詰まっているとする。真空の誘電率を  $\epsilon_0$ 、真空の透磁率を  $\mu_0$  とする。

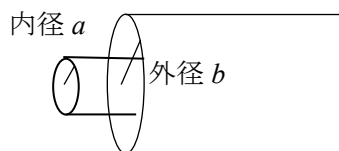


図3 同軸線路の寸法

まず、長さ当たりの内径と外径間の電気

容量  $C$  を計算する。1 m あたり、内線には  $\lambda [C]$ 、外線には  $-\lambda [C]$  の電荷が帯電していたとする。中心からの外径方向の距離を  $r$  とし、 $a < r < b$  間の外径方向の電界強度  $E$  はガウスの式より

$$2\pi r E = \frac{\lambda}{\epsilon_s \epsilon_0} \quad (18)$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_s \epsilon_0 r} \quad (19)$$

と求められる。内線と外線の電位差は、

$$V = - \int_b^a \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_s \epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_s \epsilon_0} \log \frac{b}{a} \quad (20)$$

となる。単位長さ当たりの容量  $C [F/m]$  は

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi \epsilon_s \epsilon_0}{\log \frac{b}{a}} \quad (21)$$

と求められる。

次に単位長さ当たりのインダクタンス  $L [H/m]$  を求める。これは内線に電流  $I$  が流れて、外線で電流  $I$  が戻ると考え、内線と外線間の鎖交磁束  $\phi$  をもとめる。アンペールの法則より、 $a < r < b$  で

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad (22)$$

となる。鎖交磁束  $\Phi$  は、

$$\Phi = \int_a^b B dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad (23)$$

となる。 $\Phi = LI$  の関係より、

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad (24)$$

となった。

特性インピーダンス  $Z$  であるが

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_s \epsilon_0}} \cdot \log \frac{b}{a} \quad (25)$$

と求められた。さて具体的な数値をいれて計算してみよう。 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$  は計算するとお

よそ 60 である。したがって、

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_s}} \log \frac{b}{a} \quad (26)$$

とすれば、簡単に電卓で計算できる。なお

$\log \frac{b}{a}$  は自然対数の計算である。

比誘電率  $\epsilon_s$  は樹脂であるとするなら、2 くらいであろう。外径を 3mm、内径を 1mm とするなら  $Z$  は  $46.6\Omega$  と求められる。だいたい同軸線路では、50  $\Omega$  に近い値となる。オシロスコープなどの高周波測定器の入力インピーダンスが  $50\Omega$  のモードをもっているのも、同軸ケーブルとインピーダンスマッチングをさせるためである。インピーダンスマッチングは後節でも説明する。なお平行線路では 300  $\Omega$  近い値になることも知識として覚えておいて損はないだろう。

同軸線路の伝搬速度であるが、(14)式より、

$$v \cong \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_s \epsilon_0 \mu_0}} \quad (27)$$

となる。 $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  は真空中の電磁波の伝搬速度、つまり光速 ( $c=3 \times 10^8$  m/s) である。つまり、光速の  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_s}}$  倍の速度で同時線路中を信号は伝搬する。

### 3. 伝送線路と継続行列表示

ここで長さが  $L$  [m] の電線の従属行列を考える。

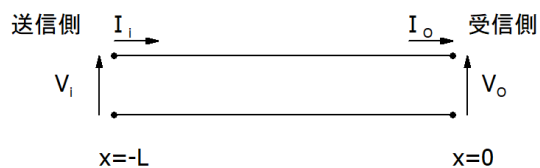


図3 長さ  $l$  の伝送線路の従属行列を考える。

従属行列は

$$\begin{bmatrix} V_i \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_o \\ I_o \end{bmatrix}$$

で表される。線路を従属行列で表すことで、異なる線路を継続させたときの信号伝達や、送信側のインピーダンスの計算が容易になる。(8)式に  $x=0$  を代入して、

$$V_o = V_F + V_R \quad (28)$$

となる。また電流  $I_o$  は、

$$I_o = -\frac{1}{Z}(V_F - V_R) \quad (29)$$

となる。つまり、

$$V_F = \frac{1}{2}(V_o + ZI_o) \quad (30)$$

$$V_R = \frac{1}{2}(V_o - ZI_o) \quad (31)$$

となる。距離  $L$  だけ後退した点、つまり送信点では、(8), (9)式より、

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{1}{2}(V_o + ZI_o)e^{(\alpha+j\beta)L} \\ &\quad + \frac{1}{2}(V_o - ZI_o)e^{-(\alpha+j\beta)L} \\ &= V_o \left\{ \frac{e^{(\alpha+j\beta)L} + e^{-(\alpha+j\beta)L}}{2} \right\} \\ &\quad + I_o Z \left\{ \frac{e^{(\alpha+j\beta)L} - e^{-(\alpha+j\beta)L}}{2} \right\} \\ &= V_o \cosh(\alpha + j\beta)L + I_o Z \sinh(\alpha + j\beta)L \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 I_i &= \frac{1}{Z} \{V_F e^{(\alpha+j\beta)L} - V_R e^{-(\alpha+j\beta)L}\} \\
 &= \frac{V_0}{Z} \left\{ \frac{e^{(\alpha+j\beta)L} - e^{-(\alpha+j\beta)L}}{2} \right\} \\
 &\quad + I_0 \left\{ \frac{e^{(\alpha+j\beta)L} + e^{-(\alpha+j\beta)L}}{2} \right\} \\
 &= \frac{V_0}{Z} \sinh(\alpha + j\beta)L + I_0 \cosh(\alpha + j\beta)L
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

となる。ここでは、 $\cosh$  および  $\sinh$  は、双極関数と呼ばれ、次のように定義される。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{34}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{35}$$

従属行列は、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha + j\beta)L & Z \sinh(\alpha + j\beta)L \\ \frac{1}{Z} \sinh(\alpha + j\beta)L & \cosh(\alpha + j\beta)L \end{bmatrix}
 \tag{36}$$

となる。

なおこの従属行列は無損失線路の場合、 $\alpha$  がゼロとなり、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta L & jZ \sin\beta L \\ j \frac{\sin\beta L}{Z} & \cos\beta L \end{bmatrix}$$

となる。

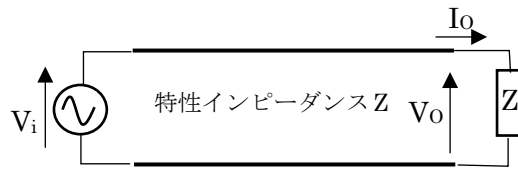
#### 4. 信号波の反射

##### (1) 無限遠線路の扱い



伝送線路が送信元から無限遠に延びているときに、送信側からみた伝送線路のインピーダンスは伝送線路の特性インピーダンス  $Z$  に等しく、反射がない状態になる。

(2) 終端に線路の特性インピーダンスに等しい負荷抵抗  $Z$  をつけた場合



この場合、線路の特性インピーダンスを  $Z$  として、線路の長さを  $L$  とする。すると、

$$\frac{V_0}{I_0} = Z \tag{37}$$

とすることができる。この関係を(30)、(31)式にいれると、

$$V_F = \frac{1}{2}(V_0 + Z I_0) = V_0 \tag{38}$$

$$V_R = \frac{1}{2}(V_0 - Z I_0) = 0 \tag{39}$$

となり、進行波だけとなり、反射波はゼロとなる。これは整合状態であり、インピーダンスのマッチングが取れているとも表現される。

##### (3) 終端を開放させた場合

この場合、(30)式は、

$$\begin{aligned}
 V_i &= \frac{1}{2}(V_0 + Z I_0)e^{(\alpha+j\beta)L} + \\
 &\quad \frac{1}{2}(V_0 - Z I_0)e^{-(\alpha+j\beta)L}
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

この場合は  $I_0 = 0$  となるので、

$$V_i = \frac{1}{2}V_0e^{(\alpha+j\beta)L} + \frac{1}{2}V_0e^{-(\alpha+j\beta)L} \quad (41)$$

となり、進行波と反射波が等しくなる。 $x = -L$ の位置において、上式の第1項は進行波であり、第2項は反射波である。この状態では送り出した進行波は同一の振幅で反射して帰ってくる**全反射**になることを意味する。

(4) 負荷  $Z_L$  をつけた場合

この場合、次の式が成り立つ。

$$\frac{V_0}{I_0} = Z_L \quad (42)$$

この場合、(30)式は、

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{1}{2}(V_0 + ZL I_0)e^{(\alpha+j\beta)L} \\ &\quad + \frac{1}{2}(V_0 - ZL I_0)e^{-(\alpha+j\beta)L} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{Z}{Z_L}\right)V_0e^{-(\alpha+j\beta)(-L)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{Z}{Z_L}\right)V_0e^{(\alpha+j\beta)(-L)} \quad (43) \end{aligned}$$

となる。この式において、第一項は $x = -L$ の位置における進行波、第二項は反射波を表している。ここでは**反射比**  $\Gamma$  を

$$\Gamma = \frac{\text{反射波の振幅}}{\text{進行波の振幅}} \quad (44)$$

と定義すると、

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z}{Z_L + Z} \quad (45)$$

となる。つまり  $Z = Z_L$  のときがインピーダンスマッチングの状態であり、無反射状態が実現できることになる。

## 5. 無損失伝送線路

伝送線路に信号を入力して、終端まで送るときに、負荷と線路のインピーダンス整合を取ることが重要であるが、その上で理想として線路抵抗の  $R$  と漏れ電流に相当するコンダクタンス  $G$  を両方とも 0 にする必要がある。このような場合、 $\alpha = 0$ 、 $\beta = \omega\sqrt{LC}$  となり、特性インピーダンス  $Z$  は  $\sqrt{L/C}$  となり、これを**無損失線路**と呼ぶ。

$R$  と  $G$  が有限値として、損失が最小になるようにしたいとする。この場合は、 $\alpha$  を最小にする。式(15)より  $\alpha$  の二乗を最小にするとして、

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (\omega^2 LC - RG)\right\} \quad (46)$$

から、この式の  $L$  の微分を 0 とする。

$$\frac{d\alpha^2}{dL} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{G^2 + \omega^2 C^2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \omega^2 L - \omega^2 C\right\} = 0 \quad (47)$$

この式がゼロとなるのは、

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L} \quad (48)$$

のときである。この条件のときに伝送線路の特性インピーダンスは

$$Z = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{R}{G}} \quad (49)$$

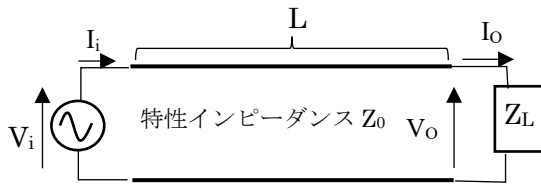
で、実数になる。このとき、

$$\alpha = \sqrt{RG} \quad (49)$$

となる。

**例題**

長さ  $L$  の伝送線路の終端に負荷抵抗  $Z_L$  が取り付けられている。線路の特性インピーダンスを  $Z_0$  とし、減衰定数を  $\alpha$ 、位相定数を  $\beta$  とする。送信側から線路を見たときの、インピーダンスを求めよ。



(解法)

$$\begin{bmatrix} V_i \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha + j\beta)L & Z_0 \sinh(\alpha + j\beta)L \\ \frac{1}{Z_0} \sinh(\alpha + j\beta)L & \cosh(\alpha + j\beta)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_o \\ I_o \end{bmatrix}$$

より、

$$V_i = V_o \cosh(\alpha + j\beta)L + I_o Z_0 \sinh(\alpha + j\beta)L$$

$$I_i = \frac{V_o}{Z_0} \sinh(\alpha + j\beta)L + I_o \cosh(\alpha + j\beta)L$$

となる。線路の入力インピーダンス  $Z_i$  は

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{V_i}{I_i} \\ &= \frac{V_o \cosh(\alpha + j\beta)L + I_o Z_0 \sinh(\alpha + j\beta)L}{\frac{V_o}{Z_0} \sinh(\alpha + j\beta)L + I_o \cosh(\alpha + j\beta)L} \\ &= \frac{V_o/I_o \cosh(\alpha + j\beta)L + Z_0 \sinh(\alpha + j\beta)L}{\frac{V_o/I_o}{Z_0} \sinh(\alpha + j\beta)L + \cosh(\alpha + j\beta)L} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{V_o}{I_o} = Z_L$  より

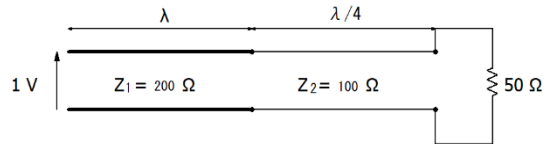
$$Z_i = \frac{Z_L \cosh(\alpha + j\beta)L + Z_0 \sinh(\alpha + j\beta)L}{\frac{Z_L}{Z_0} \sinh(\alpha + j\beta)L + \cosh(\alpha + j\beta)L}$$

と求められる。負荷側でインピーダンス整合している  $Z_L = Z_0$  のとき、入力インピーダンス

$Z_i$  は線路の特性インピーダンスと一致する。

**例題 2**

次のような二連続線路があったとする。左から線路の特性インピーダンスは  $200 \Omega$ 、 $100 \Omega$  である。右側の終端に負荷  $50 \Omega$  がつなげられたとする。左から  $1 \text{ V}$  の交流信号を加えたときに、負荷に加わる交流信号の振幅を求めよ。第一線路の長さ、第二線路の長さはそれぞれ、信号波長  $\lambda$ 、 $\lambda/4$  に等しいとする。



(解法)

第一線路と第二線路の、従属行列を求めよ。

第一線路では、

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta\lambda) & j200\sin(\beta\lambda) \\ j\frac{1}{200}\sin(\beta\lambda) & \cos(\beta\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(j2\pi) & j200\sin(2\pi) \\ j\frac{1}{200}\sin(2\pi) & \cos(j2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第二線路では

$$\begin{bmatrix} \cos(j\beta\lambda/4) & j100\sin(\beta\lambda/4) \\ j\frac{1}{100}\sin(\beta\lambda/4) & \cos(\beta\lambda/4) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & j100 \\ j\frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix} \text{したがって、}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & j100 \\ j\frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j100 \\ j\frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix}$$

となる。入力電圧を  $V_i$ 、入力電流を  $I_i$  とすると、

$$\begin{bmatrix} V_i \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j100 \\ j\frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_L \\ I_L \end{bmatrix}$$

$$V_i = 1 = j100 \times I_o$$

$$I_L = \frac{1}{j100}$$

したがって、求める負荷の電圧  $V_L$  は、

$$V_L = -j0.5$$

となり、振幅としては 0.5 V になる。